

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM

PROCEEDINGS

VOLUME XXXVI

No. 1

President: J. VAN DER HOEVE

Acting-Secretary: H. R. KRUYT

CONTENTS

- EUË. DUBOIS: "The seeming and the real cephalization of the Australian aborigine", p. 2. (With one Plate).
- C. WINKLER: "On fibres, connecting the nucleus olivaris inferior with the homo-lateral tractus centralis tegmenti pontis", p. 13). (With one Plate).
- H. A. KRAMERS: "Propriétés paramagnétiques de cristaux de terres rares, II, p. 17.
- JAN DE VRIES: "Eine Abbildung der Kugeln des Raumes auf den Strahlenraum", p. 27.
- R. WEITZENBÖCK: "Ueber die Eigenvektoren und Eigenräume einer Matrix", p. 28.
- W. VAN DER WOUDE: "Ueber eine algebraische Aufgabe bei der Reduktion von ABELSchen Integralen auftretend". (Zweite Mitteilung), p. 32.
- W. VAN DER WOUDE und J. HAANTJES: "Ueber das bewegende Achsensystem im affinen Raum: Ableitung der Grundformeln der Flächentheorie", p. 41.
- C. U. ARIËNS KAPPERS: "The Forebrain Arteries in Plagiostomes, Reptiles, Birds and Monotremes", p. 52.
- J. CLAY: "The cosmic corpuscular ultra-radiation. V. Ionisation in the Stratosphere and in the highest layers". (Communicated by Prof. P. ZEEMAN), p. 62.
- J. L. VERHAEGHE: "Die Intensitätsverhältnisse im Kadmiumspektrum". (Vorläufige Mitteilung). (Communicated by Prof. L. S. ORNSTEIN), p. 71.
- P. H. VAN CITTERT: "Het instrumentarium, door VAN SWINDEN bij de invoering van het Metrieke Stelsel gebruikt", II. (Communicated by Prof. L. S. ORNSTEIN), p. 73.
- E. A. WEISS: "Die projektiven Invarianten von vier Ebenen im R_5 ". (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK), p. 74.
- P. E. VERKADE and J. COOPS Jr.: "Alternations in the Properties of n -Monoalkylmalonic Acids: Some Remarks on MALKIN's Views concerning the Alternation Phenomena". (Communicated by Prof. J. BÖESEKEN), p. 76.
- F. A. H. W. DE MAREZ OYENS: "On Paralegoceras sundaicum HANIEL and related forms". (Communicated by Prof. H. A. BROUWER), p. 88. (With one Plate).
- A. H. BANTING: "Sur le Pli-nappe de Lujar-Gador (Cordillères Bétiqes)". (Communicated by Prof. H. A. BROUWER), p. 98. (With two Plates).
- W. BEIJERINCK: "Die mikropaläontologische Untersuchung äolischer Sedimente und ihre Bedeutung für die Florengeschichte und die Quartairstratigraphie". (Vorläufige Mitteilung). (Communicated by Prof. L. RUTTEN), p. 106.
- W. BEIJERINCK: "Erratica des Würm-Glazials in den Niederlanden". (Communicated by Prof. L. RUTTEN), p. 115. (With one Plate).

ANNIE M. HARTSEMA en IDA LUYTEN: "De invloed van lage temperaturen op het snelle strekken en bloeien van *Convallaria majalis*", I. (Communicated by Prof. A. H. BLAAUW), p. 120.

J. P. KLEIWEG DE ZWAAN: "Das Jochbein der Papuas". (Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS), p. 127.

Erratum, p. 139.

Anthropology. — *The seeming and the real cephalization of the Australian aborigine.* By EUG. DUBOIS.

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

The aborigine of the Australian continent, who is rapidly disappearing before the European settler, is an isolated and most distinct type of man, living in a state of nature, and still in the possession of an organism unaltered by domestication. Certainly we cannot find, in the present world, a more suitable subject than the Australian for the study of the natural animal organization of man, and this study, of obvious urgency, is exceptionally interesting. Of particular importance should be the knowledge concerning the stage attained in the progress of centralization of animality, the evolution which means psychoauxesis and manifests itself in the relative quantity of the encephalon, i.e. in the cephalization.

Apparently the stage arrived at by the Australian is the lowest in extant humanity. Indeed the average internal capacities of the cranium, of the Australian aborigine, male and female, are very low. According to the recent thorough study of Australian skulls by MORANT¹⁾, based on large numbers of selected measurements of sexed skulls, the average cranial capacity of 134 adult male skulls, from the five states of Australia, is 1295.3 c.c., and of 66 female skulls, of the same provenance, 1146.4 c.c. (Table I).

TABLE I
Australian aborigines

DENIKER and MORANT	Stature (DENIKER) ²⁾		Cranial capacity (MORANT) ¹⁾			
	Nr. of males	mm.	Nr. of males	c.c.	Nr. of females	c.c.
Queensland	—	—	19	1287.7	} 27	1141.4
New South Wales	40	1630	38	1287.7		
Victoria	58	1677	18	1311.3	} 39	1149.9
South Australia	50	1657	39	1319.6		
Western Australia	—	—	20	1255.5		
Total number and Mean	148	1657.5	134	1295.3	66	1146.4

¹⁾ G. M. MORANT, A study of the Australian and Tasmanian Skulls, based on previously published measurements. "Biometrika", Vol. 19, pp. 417—440. Cambridge 1927.

²⁾ J. DENIKER, Les races et les peuples de la terre. Deuxième Édition. pp. 703—705. Paris 1926.

These averages are only equalled by those of the African Bushmen, male 1297 c.c. and female 1185 c.c. (SHRUBSALL) and the Andaman Islanders male 1281 c.c. and female 1148 c.c. (FLOWER). But these two races are of small stature, in the males 1557 mm and 1485 mm. The Australian aborigine, on the contrary, falls little (only 26 mm) short in stature of the European, male average stature 1684 mm, according to QUETELET. It would seem to follow that the cephalization of the Australian is inferior to that of any other extant race, much inferior to the European with his 1450 c.c. average cranial capacity (Table II).

TABLE II

	Stature (mm)		Body weight (kg)		Cranial capacity (c.c.)		
	Male	Female	Male	Female	Male	Female	
European average	1684	1583	65	54	1450	1300	(Mean stature. QUETELET).
Australian average, group Arunta tribe	1657.5	1551.5	61.42	57.48	1308	—	42 males, 11 females. (WILKINSON). Cap. calculated.
Australian general average	1658.5 (381)	—	—	—	1295.3 (134)	1146.4 (66)	Mean stature. NSW, V, SA, CA. (DENIKER). Cap. Q. NSW, V, SA, WA. (MORANT).

It is chiefly the absolute and, as it seems, relative low cranial capacity that confirmed anthropologists in the belief that we may look upon the Australian as "a very ancient type of man, the best living representative of Pleistocene man, the nearest approach to the common ancestor of modern mankind" (KEITH), nay "als ein Zweig der Menschheit, der sich sehr frühzeitig von der gemeinsamen Wurzel der Menschenrassen und Menschenaffen abgegliedert hat" (KLAATSCH). Also, "as a race incapable apparently of intellectual improvement beyond their present low state of development" (TURNER).

Cranial capacity, however, does not depend on that somatic quality of stature alone. To justify this impression of the low cranial capacity we should have evidence of average body weights and knowledge of the constitution of the Australian's organism, such a knowledge as was required to enable us to judge of the *real cephalization* of woman and of Neanderthals¹⁾. Homage be paid again here to the memory of MANOUVRIER, who was the first to point out the correlation between cranial capacity and proportions of the body.

For knowledge of that kind concerning the Australian aborigine I am

¹⁾ EUG. DUBOIS, Comparison of the Brain Weight in Function of the Body Weight between the two Sexes. 1918. These Proceedings, Vol. XXI, pp. 850—869.

—, On the Significance of the Large Cranial Capacity of *Homo neanderthalensis*. 1920. Ibid. Vol. XXIII, pp. 1271—1288. — I may rectify on this occasion erroneous statements on p. 1288, due to misprints in the cited paper of MAX WEBER. The real brain weight of *Tursiops tursio* was 1556 grams, the body weight 432 kg, ratio 1 : 278, cephalization factor 1.151.

much indebted to Dr. H. J. WILKINSON, Professor of Anatomy and Histology and Chairman of the Board of Anthropological Studies at Adelaide University, who on a request of Professor ELLIOT SMITH, on my behalf, furnished me (in 1931) with valuable statistics, records of stature and weight, taken at Macumba Station near Alice Springs, Central Australia, thus enabling me to compare average heights and weights of 42 men and 11 women (Table II).

By comparing the average male stature with the average of DENIKER's 148 Australian men in Table I, the two happening to be equal, then calculating their mean cranial capacity, according to the averages of MORANT, and by also calculating the mean cranial capacity of the 95 men of the same provenance (NSW, V, SA) from the records of MORANT, and their mean stature 1650 mm, according to the averages of DENIKER, I obtained for the mean capacity of those 42 central Australian (Arunta tribe) men the probable value of 1308 c.c.¹⁾

The evidence thus acquired confirmed me in the presumption that the interpretation of the low capacity of the Australian aborigine could be found in his specific organic constitution, similarly to that of woman's low cranial capacity, namely by the smaller muscularity.

Indeed, it always struck travellers and settlers in Australia that the native is far inferior to the European in muscular development, which may be called poor, "the limbs being thin and excessively lean", the calf in particular is characteristically thin. The trunk, however, is mostly out of proportion heavy. The bones are delicately formed, as in woman.

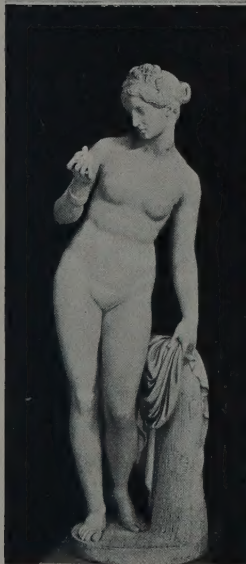
A strong impression of the disproportion between the limbs and the trunk, of the slenderness and weakness of the limbs was also received in the year 1802 by FRANÇOIS PÉRON, naturalist on the French ships "le Naturaliste" and "le Géographe" on the voyage to the Austral lands²⁾. The muscular weakness of the Australians he established by experiment. When staying at Port Jackson he measured, by means of the dynamometer, then recently constructed by RÉGNIER, the strength of grip ("force des mains") and the strength of back ("force des reins") of 13 adult native males and, for comparison, of 17 Frenchmen, participants of the Expedition. This with the purpose to put to the test JEAN JACQUES ROUSSEAU's praise of the "état de nature". The result, in the opinion of PÉRON, decidedly disproved ROUSSEAU's revolutionary doctrine. The strength of this "homme de la

¹⁾ The latter calculation of cranial capacity is founded on the following principle: As the $\frac{100P}{H^2} \left\{ \begin{array}{l} g \\ cm \end{array} \right.$ ratio approaches a constant in groups of individuals of similar race, sex, age and physiological development (BARDEEN, Amer. Jour. Phys. Anthropol. 1923, p. 386),

the same is valid for the $\frac{E^{0.24}}{h} \left\{ \begin{array}{l} g \\ mm \end{array} \right.$ or $\frac{Cap^2}{h} \left\{ \begin{array}{l} cc \\ mm \end{array} \right.$ ratio.

²⁾ F. PÉRON, Voyage de découvertes aux terres australes, pendant les années 1800—1804. Tome I, pp. 446—484. Paris 1807. — Tome II (LOUIS FREYCINET), pp. 460—464. Paris 1816.

EUG. DUBOIS: THE SEEMING AND THE REAL CEPHALIZATION OF THE AUSTRALIAN ABORIGINE.



Three typical natives. Iliaura tribe, Central Australia, 1930. (WILKINSON).
Venus (Teyler Museum) and group of five central Australian natives, 1931. (WILKINSON).

nature" was found very much smaller than that of the civilized people (Table III).

TABLE III a.

<i>Strength of Grip. Frenchmen</i>	<i>Strength of Grip. Australians</i>
Average sum ($r + l$) of 17 male subjects (20 to 50 years), participants of the "Géographe" and "Naturaliste" Voyage, measured in 1802 by F. PÉRON. "Voyage de découvertes aux terres Australes" (1807), Tome I, p. 482, Table IV.	Average sum ($r + l$) of 13 male aborigines (18 to 40 years). Port Jackson, 1802, measured by F. PÉRON. Opus cit. Tome I, p. 477, Table II.
RÉGNIER's dynamometer. kg. 69.2 .	RÉGNIER's dynamometer. kg. 51.8 .

III b. *Strength of Grip Belgians*

Combined two series of QUETELET's Table "Force des mains" in "Anthropométrie" (1871), p. 364. Averages of at least 20 subjects of each year, and each sex. ("Physique sociale") (1835). Tome II, p. 68). RÉGNIER's dynamometer. kg.

Age	Men			Women		
	Right hand	Left hand	Sum	Right hand	Left hand	Sum
18	32.90	29.95	62.85	20.80	18.80	39.60
19	32.55	30.35	62.90	21.75	19.50	41.25
20	36.45	34.10	70.55	21.70	20.20	41.90
23	40.60	37.65	78.25	24.45	21.80	46.25
Mean	35.625	33.012	68.637	22.175	20.075	42.250

III c. *Strength of Grip. Russians.*

Calculated from ANTIPOFF's percentiles. (N. OSERETZKY, Psychomotorik. Methoden zur Untersuchung der Motorik. Zeitschrift für angewandte Psychologie [W. STERN und O. LIPMANN]. Beiheft 57, p. 70, Leipzig 1931). Averages of 60 adult males, 73 adult females.

COLLIN's dynamometer. kg. Sum of measurements of right and left hand strength.

Men	Women
103.83	70.83

Strength of Back. Frenchmen

Average of the same 17 (male) subjects measured in 1802 by PÉRON. Opus cit. Tome II. 1816 (L. FREYCINET), p. 464, Table IV. RÉGNIER's dynamometer. kg **152**

III. d

Strength of Back. Australians

Average of the same 13 (male) aborigines, Port Jackson, measured in 1802. by PÉRON. Opus cit. Tome II, p. 463, Table II. RÉGNIER's dynamometer. kg **102**

Strength of Back. Belgians

Combined two series of QUETELET's Table "Force des reins" in "Anthropométrie" p. 360.

RÉGNIER's dynamometer. kg.

Age	18	19	20	21	22	23	25	27	35	Boarding school and orphanage girls. Hence strength in adults only 53.9% of that in male adults.
Men	118	125	132	138	143	147	153	154	154	
Women	(67)	71	74	76	78	80	82	83	83	

PÉRON's interpretation and conclusion were erroneous, he nevertheless established an important fact.

He was strongly inclined to impute the weakness of the Australian to the scantiness of his food and the excessive fatigues to which he is subjected in obtaining it, those circumstances possibly being the primitive causes also of the faults in his physical conformation. However: "Sans doute il ne serait pas invraisemblable de considérer un vice de conformation aussi général, aussi décidé, comme dépendant de l'organisation physique propre à des peuples qui, sous tant d'autres rapports, se distinguent de ceux déjà connus" ¹⁾).

We now know for certain that the Australian aborigines, on the whole continent and in different nutritial conditions of their environment, show very little difference in their physical organization. Moreover, that "the food of the native Australians is very varied, and is generally obtained in tolerable abundance" ²⁾. On the other hand, also stronger peoples than the Europeans (Mongols, Eskimos) and wild animals do not infrequently suffer from famine. Apparently we may consider the small strength of the muscles in the Australian aborigine and the slenderness of his limbs as specifically proper to the race, and founded on his whole organization.

By means of RÉGNIER's dynamometer PÉRON found the average strength of grip of the Australian natives 51.8 kg against 69.2 kg that of the Frenchmen, the average strength of back 102 kg against 152 kg in the Frenchmen. The average strength of those Frenchmen thus perfectly agrees with the average of the Belgians measured, with a dynamometer of the same construction, by QUETELET (Table III). The Australian aborigines, on the other hand, have only 74.85 per cent strength of grip, and 67.11 per cent strength of back of the Frenchmen.

Now, together with those valuable statistics, and again in the past year, Prof. WILKINSON obliged me much also by sending a number of interesting photographs of typical central Australian natives, accompanied by a reprint of the important paper on the mentality of the Australian aborigine by FRY and PULLEINE ³⁾, containing the motor tests strength of grip, of back and of legs carried out by the methods described by WHIPPLE ⁴⁾, in August 1930 at Mac Donald Downs, Central Australia, about 320 km N.E. of Alice Springs, on 12 adult males and 8 females of full-blooded natives of the Iliaura tribe.

The reliability and the value of these measurements and those of PÉRON are evidenced by the fact that the relative strength of grip and back

¹⁾ O. c. Tome I, p. 465.

²⁾ A. R. WALLACE, Australasia. Vol. I. Australia and New-Zealand, p. 120. London 1893.

³⁾ H. K. FRY and R. F. PULLEINE, The Mentality of the Australian aborigine. The Australian Journal of Experimental Biology and Medical Science. Vol. VIII (1931), pp. 153—167.

⁴⁾ G. M. WHIPPLE, Manual of Mental and Physical Tests. Part. I. Simpler Processes. Baltimore 1914—1919.

(sum) of the NSW Australians, measured in 1802 by the French naturalist appears to be equal to that of the central Australians 128 years later on by the Adelaide University Anthropological Expedition¹⁾. Indeed the calculated relative strength in the Australians is **69.53** per cent of that in the Frenchmen, according to the first measurements, and **69.82** per cent of the strength in American Whites, according to the latter (Table IV).

TABLE IV

<i>Strength of Back</i>	<i>Strength of Legs</i>
<i>American Whites. Nebraska</i>	
HASTING's measurements. (WHIPPLE, Manual, Part I, pp. 110—113). Mean of 5000 young men (17—30 years). SMEDLEY's Back and leg dynamometer. kg.	
150.9	189.5
<i>Australian aborigines. Central Australia.</i>	
Iliaura tribe. (H. K. FRY and R. H. PULLEINE, "The Mentality of the Australian aborigine", p. 157) (1931). SMEDLEY's dynamometer. kg.	
Adult males (Average of 12 subjects) 92.5	Adult males (Average of 12 subjects) 109.5
Adult females Average of 5 subjects 61.0	Adult females (Average of 5 subjects) 61.0
<i>Strength of Grips and Back</i> . . .	Male Australian aborigines 153.8 Frenchmen 221.2 $\times 100 = 69.53$
" " " " " . . .	Male Australian aborigines 171.2 Male American whites 245.2 $\times 100 = 69.82$
<i>Strength of Grip, Back and Legs</i> .	Male Australian aborigines 280.7 Male American whites 434.7 $\times 100 = 64.57$
" " " " " " .	Female Australian aborigines 174.1 Male Australian aborigines 280.7 $\times 100 = 62.02$

This result is at the same time a confirmation of PÉRON's opinion that, on account of the uniformity, and the physical and moral similitude of the Australian aborigines, the results from the small number of his observations is even more positive than those would be of much more numerous series of observations on Europeans.

It now follows from the observations of the total strength of grip, back and legs in adult male Australian aborigines and in adult male American Whites, (this sum giving a fair representation of the general muscle force), that this force, in the adult male Australians amounts to **64.57** per cent of that in the adult male European (Table IV). Evidently we here meet with a characteristic difference in muscularity. Least strong are, moreover, the legs.

¹⁾ Ll. cc.

In order to examine the significance of this difference I want to recur to subjects of earlier research: principally concerning the cephalization of woman and the large cranial capacity of *Homo neandertalensis*, referred to above. In the present study I may complete my earlier research by a discussion of further evidence.

The most important, although inconspicuous and disregarded secondary sexual character of woman is doubtless her comparatively small brain volume, of which we have abundant evidence in Europeans. The average internal capacity of the cranium in adult men of all the European groups together is about 1450 c.c. In adult woman 1300 c.c. These capacities correspond to about 1360 g and 1220 g average brain weights. The sexual difference thus amounts to 150 c.c. cranial capacity and 140 g brain weight. Similar differences exist in the other races of mankind, as appears from numerous measurements of cranial capacity; we have, however, not much evidence of the brain weights in those races. This study, principally concerning the Australian aborigine, may, therefore, be based exclusively on cranial capacity, closely approaching, as it does, brain volume.

To a certain extent this sexual difference is only a consequence of the correlation existing between cranial capacity and the bulk of the body, as the average body weight of European woman is only 54, against 65 kg weight of the man. This difference is, however, too small to account for the 150 c.c. difference of brain volume, for the greater part it is due to real sexual difference, which can be calculated as follows.

Between men of different body weights, and between women of different body weights, separately, the capacity E is function of the fourth power root of the body weight, exactly of $P^{0.24}$, according to the formula $E = k \cdot P^{0.24}$, in which the factor k indicates the cephalization ¹⁾. Assuming the factor k to have the same value for woman as for man, we calculate that the female cranial capacity should be $E_f = 1450 \left(\frac{54}{65} \right)^{0.24} = 1387$ c.c. This is 87 c.c. more than the real capacity. Consequently only 63 c.c. of the 150 c.c. total sexual difference of cranial capacity are to be imputed to the smaller bulk of the female body. On the contrary those 87 c.c. or 6 per cent of the male cranial capacity we have to regard as a difference of true secondary sexual character. Apparently, in Europeans, the female cephalization is this much *inferior* to the male cephalization.

In a similar way, from the formula $\left(\frac{1300}{1450} \right)^{\frac{1}{0.24}} = \frac{Pf}{65000}$ we calculate $Pf = 41237$ g, the average female body weight for equal cephalization with man. The real average body weight of the European woman, 54000 g is

¹⁾ EUG. DUBOIS, Über die Abhängigkeit des Hirngewichtes von der Körpergrösse beim Menschen. Archiv für Anthropologie. Band 25, pp. 423—441. Braunschweig 1898. — L. LAPICQUE, Le poids encéphalique en fonction du poids corporel entre individus d'une même espèce. Bulletins et Mémoires de la Société d'Anthropologie de Paris, pp. 316—326. Paris 1908.

12763 g more. It thus seems possible to describe that important character of sexual dimorphism in this manner: The stage of cephalization of woman being equal to that of man, she has a considerable surplus or ballast (as we may call it) of body weight. This, in fact, can be accounted for, chiefly, by the larger amount of subcutaneous fat. As indeed cephalization is directly related only to animal organization, the total body weight of woman, being differently composed, cannot represent the bulk of that organism similarly to that of man. In fact, the muscles and other parts constituting the motor organization are of considerably smaller size in woman than in man of the same body weight. According to the observations of THEILE¹⁾ the mean muscle weights of four average men and of four average women (one side) are 13232 g and 8560 g. Consequently the total muscle weight of woman is 64.69 per cent of the total muscle weight of man, whereas the body weight of woman amounts to 83 per cent of that of man. Further, taking into account the average statures of those four men and of those four women, 1686 mm and 1589 mm (which closely approach the European averages according to QUETELET), we find that the total cross section of the female muscles amounts to 68.64 per cent of the total cross section of the male muscles. (Table V).

From other measurements referred to in Table V we have evidence, that the relative cross section of the *muscle fibers* in the two sexes of man exactly correspond to the relative cross section of the *muscles*. We have also evidence, that the same proportion holds for other elements in the animal organization, nerve fibers, nerve cells. These elements all differ in thickness only, the numbers in the two sexes are equal.

Therefore it is not astonishing to meet with a corresponding sexual relation of the brain volumes. We know that $\left(\frac{1300}{1450}\right)^{\frac{1}{0.24}}$ is equal to the relation of equally effective body weights in the two sexes $\frac{41237}{65000}$, which, assuming equivalent animal organization, should also be the proportion of the bulk of the muscles.

Consequently, assuming proportionate equality of the female and the male cranial capacity, and again taking into account the average stature of the four men and the four women (closely approaching the European averages) we arrive, in this indirect way, at the result that the average total cross section of the muscles in woman is 67.49 per cent of the average total cross section in man, a value that is strikingly conformable to the relative female cross section 68.64 per cent calculated from the observed muscle weights in the two sexes. (Table V).

¹⁾ F. W. THEILE, Gewichtsbestimmungen zur Entwicklung des Muskelsystems und des Skelettes beim Menschen. Nova Acta der Ksl. Leop.-Carol.-Deutschen Akademie der Naturforscher. Band 46, nr. 3, p. 135—471. Halle 1884. — Compare Tables in "Comparison of the Brain Weight", cited above.

TABLE V
Average diameters of striated muscle fibers. (W. BOWMAN. 1840)¹⁾
Human average

Males (3) $\frac{1}{352}$ inch = 72.14 micra

Females (2) $\frac{1}{454}$ " 55.93 "

Average cross sections $\frac{\text{female}}{\text{male}} \times 100 60.11$

Human muscles	Average diameters of muscle fibers (Micra) (G. SCHWALBE & R. MAYEDA. 1890) ²⁾				Average weights of muscles (Grams) (W. F. THEILE 1884)	
	Curves of diameter				Men (4)	Women (4)
	Relative widths		Relative maxima			
	Men	Women	Men	Women		
Biceps brachii	14	12	20	17	177.5	87.7
Sartorius	18	13	24	17	191.0	96.9
Gastrocnemius	22	17	28	22	386.8	243.4
Mean curves and sum of weights	18	14	24	18.7	755.3g	428.0
Mean weights of all muscles, one side					13232g _i	8560
Mean stature					1686mm	1589
Mean cross section female male Fibers and 3 muscles		60.5		60.5		60.13
Idem all muscles						68.64

$$\left(\frac{\text{Female cranial capacity}}{\text{Male cranial capacity}} \right)^{\frac{1}{0.24}} \times \frac{\text{Male stature}}{\text{Female stature}} \times 100 \left(\frac{1300}{1450} \right)^{\frac{1}{0.24}} \times \frac{1684}{1583} \times 100 = 67.49$$

Again, the cross section of muscles being proportional to the muscle force, we can estimate the cross section by measuring the strength of physiological groups of muscles on the living by means of dynamometers. Though differently constructed instruments give different absolute results, as appears in Tables III, IV and VI, they may yet give thrustworthy relative results, as evinced by the Australian measurements of grip and back strengths.

It then appears that in different groups of subjects the relative female strength of grip does not vary more than from 60.89 per cent to 68.22

¹⁾ W. BOWMAN, On the Minute Structure and Movements of Voluntary Muscles. Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the year 1840. Part II, London 1840, p. 461.

²⁾ G. SCHWALBE und R. MAYEDA, Über die Kaliberverhältnisse der quergestreiften Muskelfasern des Menschen. Zeitschrift für Biologie (Kühne und Voit). Band 27, pp. 482—516. München und Leipzig 1890.

per cent (Table VI). The total strength of grip, back and legs, measured in female Australian aborigines (Table IV) is **62.02** per cent of that in male Australian aborigines. Also this result of the physiological experiment is little different from the result obtained indirectly by calculating the

TABLE VI

Strength of Grip. American Whites. Chicago.

Whipple, Manual of Mental and Physical Tests, Part I. (1914—1919), p. 102, Table 22.

Number more than 200 of each sex.

SMEDLEY'S dynamometer. kg.

Age	Men			Women		
	Right hand	Left hand	Sum	Right hand	Left hand	Sum
18	49.28	45.01	94.29	29.75	27.66	57.41

Strength of Grip. Australian aborigines

H. K. FRY and R. H. PULLEINE, "The Mentality of the Australian aborigine", p. 156. Full-blooded adult natives (12 males, 8 females) of the Illiura tribe. Central Australia.

Measured in the year 1930.

SMEDLEY'S dynamometer. kg.

	Men			Women		
	Right hand	Left hand	Sum	Right hand	Left hand	Sum
Adult	41.0	37.7	78.7	26.1	26.0	52.1

<i>Strength of Grip</i>	$\frac{\text{Women}}{\text{Men}} \times 100$
Belgians	$\frac{42.250}{68.637} \times 100 = 61.56$
Russians	$\frac{70.83}{103.83} \times 100 = 68.22$
American Whites	$\frac{57.41}{94.29} \times 100 = 60.89$
Australian aborigines	$\frac{52.1}{78.7} \times 100 = 66.20$

relative total muscular cross section, starting from the cranial capacities, for in this way we arrive at the value of 64.22 per cent (Table VII).

By all this evidence it appears to be proved with certainty, that the *real cephalization* of woman is equal to that of man. The difference of the animal organization consists only in the thinner elements of the female organism, entailing livelier metabolism than in man, in the same way as in birds, compared with mammals (and in the females of domesticated mammals according to VON DER MALSBERG¹⁾, giving to woman a strong

1) K. VON DER MALSBERG, Die Zellengröße als Form- und Leistungsfaktor der landwirtschaftlichen Nutztiere. Ein histobiologisches Problem in der Zuchtungskunde. 368 pp. Hannover 1911. P. 187: „Die relative Feinzelligkeit der weiblichen Tiere gehört zu den grundsätzlichsten sogenannten sekundären Geschlechtsmerkmalen“.

TABLE VII
Cross sections of Muscles calculated from cranial capacities

$\frac{\text{European female}}{\text{European male}} \times 100$	$\frac{\text{Australian male}}{\text{European male}} \times 100$
$\left(\frac{1300}{1450}\right)^{\frac{1}{0.24}} \times 100 = 63.44$	$\left(\frac{1308}{1450}\right)^{\frac{1}{0.24}} \times 100 = 65.09$
$63.44 \times \frac{1684}{1583} = 67.49$	$65.09 \times \frac{1684}{1657.5} = 66.13$
$\left(\frac{1146.4}{1295.3}\right)^{\frac{1}{0.24}} \times 100 = 60.12$	$\left(\frac{1295.3}{1450}\right)^{\frac{1}{0.24}} \times 100 = 62.49$
$60.12 \times \frac{1657.5}{1551.5} = 64.22$	$62.49 \times \frac{1684}{1658.5} = 63.45$

feature of endurance, although she is inferior to man in force exerted for a short time. In the same way birds are superior to mammals in endurance, but inferior to mammals, of equal size, in respect to force of little continuance. The ratio of the cross section of the muscle fibers between bird and mammal, of similar size of body, is, however, about double that between woman and man.

Having in this way ascertained the proportionality of the force to the observed cross section of muscles, and of the latter to the relative cross section of the muscles computable from cranial capacities, we are now enabled to estimate the real cephalization of the Australian aborigine, in comparison with the European, from the evidence of relative muscle force.

Again assuming the cephalization to be equal for these two, we obtain $Ea = 1450 \left(\frac{61420}{65000}\right)^{0.24} = 1430.2$ c.c. This is for the Australian 122 c.c. more than the real cranial capacity. Consequently only 20 c.c. of the 142 c.c. total racial difference of cranial capacity are to be imputed to the somewhat smaller bulk of body of the Australian, on the contrary 122 c.c., or 8.4 per cent of the European male cranial capacity, we have to regard as a difference of true racial character. Apparently the cephalization of the Australian is this much inferior to that of the European.

But again too, assuming equal cephalization, we find

$Pa = 65000 \left(\frac{1308}{1450}\right)^{\frac{1}{0.24}} = 42307$ g. The real body weight 61420 g is 19113 g more than the effective weight of the male Australian organism if its constitution were the same as in the male European. To the animal organization proper 19.113 kg have to be regarded as a surplus or ballast, which in this case can be accounted for by the relatively weightier trunk and head. (Compare European woman and Australian aborigines of the Plate). Only the weight of 42.307 kg does represent, in the case of the Australian, the bulk of the animal organism similarly to that in European man. Indeed in the Australian the muscles and other parts constituting the motor organization are considerably thinner than in the European.

Of the relative cross section we can have an idea from the relative muscle force with which we are now acquainted by the records of FRY and PULLEINE (Table VI and VII).

The average total strength of grip, back, and legs of the adult male Australian aborigines (Iliaura tribe) according to those records, amounts to 64.57 per cent of the total strength of adult male American Whites, according to the records of WHIPPLE and HASTINGS.

The relative cross section of the muscles calculated from the cranial capacity for those central Australian aborigines (Arunta tribe) is 66.13 per cent, calculated for Australians in general 63.45 per cent (Table VII). Again conformity of intracranial and external values in the animal organization.

Consequently the *real cephalization* of the Australian aborigine is equal to that of the European.

This result confirms similar results obtained in the case of Neandertal man, the Japanese and Eskimo, whose cephalization is seemingly greater than that of the European. It again bears evidence thereof that man did not gradually progress in human organization, but came into existence as one finished genus, and that indeed all the multiform types of man, in the present and in the past, belong to one and the same stage of natural animal organization.

Neurology. — *On fibres, connecting the nucleus olivaris inferior with the homo-lateral tractus centralis tegmenti pontis.* By C. WINKLER.

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

A few months ago, Dr. SCHENK and Dr. RADEMAKER of Lóosduinen, delivered to me for research, the brains of a woman, aged 38 years, in order to verify their diagnosis: a haemorrhagic cyst in the tegmentum pontis.

On the 5th of June 1932, this woman, suffering of nephritis, had suddenly complained of giddiness, and, at once, all lateral movements of the eyes, to the left as well as to the right, were impossible, whereas the vertical movements were correctly made. The eyes were in the position of strabismus convergens. Convergence of the eyes was possible, with narrowing pupils, whose reactions on light were normal. The reflexes of the cornea were absent on both sides.

She was lying down, yelling. She asked for her children, told that she was dead and cold. The perception of deep sensibility and the perception of pain were severely disturbed on both sides, most on the left. At first she did not move her limbs. They were hanging down at her side, hypotonic, with intensive knee-yerks. After a few weeks however her voluntary

movements increased, though they were always very uncertain and often substituted by incoordinated movements.

The disorder in the eye-movements and in the perception persisted without any amelioration, until at the 6th of October 1932 death suddenly occurred, caused by a new haemorrhagic fit, leaving a focus in the parieto-frontal lobe of the right hemisphere.

In the tegmentum pontis a yellow, haemorrhagic cyst was found, irregularly shaped. I will describe five sections through this focus.

10. A section (fig. 1) through the caudal end of the cyst, at the level of the origin of the VIth and the VIIth nerves. Here the greater part of the cyst is seen at the right¹⁾ side. It destroys the passing root-fibres of the right VIth nerve, the medial side of the right lemniscus medialis and the ventral part of the right tractus centralis tegmenti pontis. The focus has already somewhat passed the raphe.

20. A section (fig. 2), somewhat higher. The extension of the cyst has now enlarged. It destroys the radicular fibres of the left VIth nerve. On both sides the cyst damages the lemniscus medialis, but only at the right side the tractus centralis tegmenti is destroyed. At the left side it is normal. In this bundle is found a ventral field, filled up by thin fibres, without any grey matter between them. It may be distinguished from a dorsal field, where the fibre-bundles are separated by grey reticula. The ventral field, the pallido-olivary bundle, is completely annihilated by the cyst, the dorsal is damaged, but not destroyed.

30. A section (fig. 3), going through the level of the leaving Vth nerve. Here the greatest extension of the cyst is sectionned and it has a very irregular shape. The destruction at the right side is nearly the same as it was in fig. 2, but the fasciculus longitudinalis posterior is here damaged and on the left side, it is completely destroyed. At the left side the tractus centralis is normal.

40. A section (fig. 4) on a higher level, but still through the origin of the Vth nerve. The extension of the cyst is beginning to diminish. At the left side it destroys completely the fasciculus longitudinalis posterior, at the right side only partially. On both sides the lemniscus medialis is totally annihilated, whereas the left tractus centralis tegmenti always remains normal.

50. A section (fig. 5) at the level, where the brachia conjunctiva are intending to begin their crossing. The focus is no longer touched. A small rest of its upper end is seen on the right side. Both fasciculi longitudinales posteriores have lost many fibres, more at the left side than at the right. Both lemnisci mediales have lost many fibres, more on the right side than on the left.

The left tractus centralis tegmenti, not damaged at its lower end, is much more extensive than the right one, the ventral field of which has been

1) All figures are reversed. The right side in the figure is really the left side.

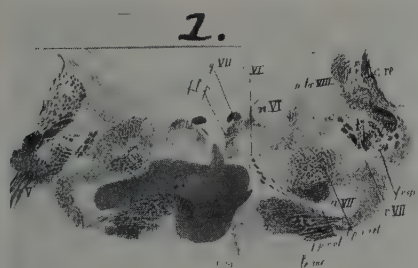


Fig. 1. Drawing of a section through the caudal end of the cyst.



Fig. 2. Drawing of a section with the root-fibres of the VIth nerve crossing the cyst.

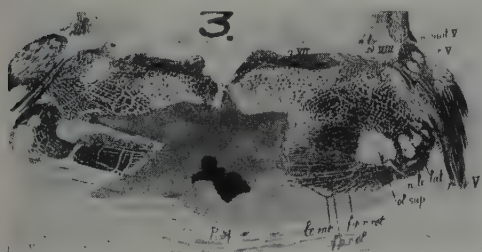


Fig. 3. Drawing of a section through the greatest extension of the cyst.

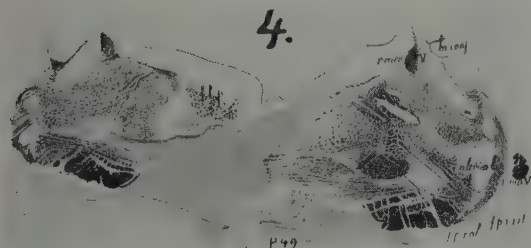


Fig. 4. Drawing of a section through the frontal end of the cyst.

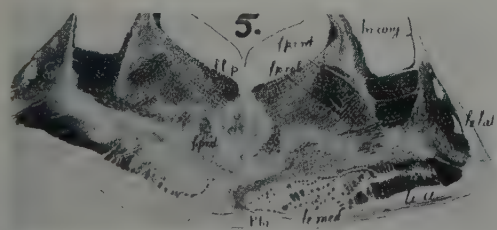


Fig. 5. Drawing of a section just above the cyst.



Fig. 6. Foto of a section through the frontal part of both olivary nuclei in a WEIGERT—PAL preparation.

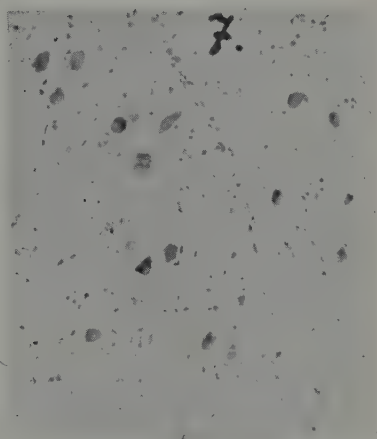


Fig. 7. Foto of the olivary cells of the left (normal) nucleus olivaris inferior in a NISSL-preparation.

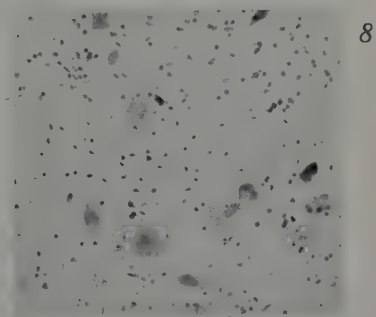


Fig. 8. Foto of the swollen cells of the right nucleus olivaris inferior in a NISSL-preparation.

completely destroyed. This bundle has somewhat changed its place, it is no longer found in the centre of the tegmentum. It is found next to the brachium conjunctivum and has lost, at the right side, many fibres.

Now, resuming the facts, found about the delimitation of the cyst, we may stimulate:

1^o. That the disorder in the movements of the eyes may be interpreted by the destruction of both VIth nerves, together with both fasciculi longitudinales posteriores.

2^o. That the disorder in the perception of the deep sensibility and of pain, may be caused by the complete destruction of both lemnisci mediales.

3^o. That the destruction of the ventral part of the tractus centralis tegmenti on the right side, whereas the left is an unaltered, completely normal, bundle, is a very exceptional observation in the human brain.

With regard to the latter conclusion, it may be of interest to investigate the region of the inferior olivary bodies. In fig. 6 is given a foto of a section through the medulla oblongata treated with the method of WEYGERT-PAL. The right amiculum olivare is missing all its fibres, whereas the left one encircles the olivary nucleus as a black mantle.

This evidence gives a new argument to the supposition, that fibres from the striatum and from the nucleus ruber (the pallido-rubro-olivary-bundle) are running in the ventral field of the tractus centralis tegmenti, which is destroyed here at the right side. The destruction of this field, homolateral to the mantle, has effected a total degeneration of the pallido-rubro-olivary-fibres, going in the amiculum olivare and finding their endings into the olivary nucleus itself.

Still more interesting is the observation, that the circonvolutions of the right olivary nucleus, if compared to the left one, are swollen. This swelling is due to pathological changes in the olivary cells. They are nearly two or three times larger as they are in the left, normal nucleus (fig. 7).

Their protoplasm is swollen, it has solved the tigroid substances, and the cell does no longer take any stain. The nucleus of the cell has taken an excentric position (fig. 8).

Analogous changes were described by NISSL in the polygonal cells of the ventral spinal horn, a few weeks after the transsection of the ventral spinal roots, preceding the cellular atrophy. Retrograde degeneration of the cell after lesion of their axon is always characterised by swelling of the cell before its atrophy begins.

The axons of the olivary cells however are going to the opposite cerebellum. After section of the corpus restiforme or after extirpation of one hemisphere of the cerebellum, the cells in the contra-lateral nucleus olivaris atrophy in a few months, after a preceding swelling.

In the case, here described, the corpus restiforme nor the cerebellum present any changes. Moreover the degenerative swelling of the olivary cells still are visible after a delay of four months.

It may be possible to explain the cell-alterations, if accepting the existence of a strong collateral of the axons, going upward to the ventral part of the tractus centralis tegmenti and representing a centripetal path of the olivary nucleus to the higher cerebral level. In such circumstances the cell-degeneration proceeds more slowly, and the main part of its axon being healthy, the cell is not compelled to die and to disappear.

The one-sided destruction of the central bundle of the tegmentum pontis by the haemorrhagic cyst has caused :

- 1°. a complete disappearance of all fibres towards the olivary amiculum.
- 2°. a slow degeneration of all the olivary cells, not surpassing their first stage of swelling, a consequence of the lesion of the axon-collateral, not far away from its origin from the olivary cells. It may prove the existence of a bundle from the olivary nucleus towards the higher regions of the nervous system.

Nearly the same event is found in the olivary cells, after extirpation of the cerebellum. A few weeks after this operation, the nervous cells are swollen. After a few months they have nearly disappeared. But after a year, another fact appears. I possess in my collection, the series through the brain of *Macacus Rhesus*, where after this operation new cells are formed in the nucleus olivaris. I do not think, that they are produced by the small cells in the olivary nucleus, but it is my opinion, that the larger cells, partly atrophied after the cerebellar loss, have restored under the influence of the axon-collateral towards the striatum and have reached a development not quite as large as before.

In the case, here described, there is evidence of the existence of a centripetal bundle from the nucleus olivaris, probably an olivary-striatal bundle.

In the "Revue Neurologique" of 1932, Prof. LHERMITTE with his coworker Dr. TRELLES, has also seen swollen cells in the olivary nucleus in a syphilitic brain.

He writes me, that he has now collected 3 cases of cell-swelling in that nucleus after the destruction of the central bundle in the tegmentum pontis. Destruction of this bundle and swelling of the olivary cells seem to be coordinated facts. As to the explanation, given in this paper Prof. LHERMITTE is sceptical. Among other arguments, he means, that the cell-alteration found in the nucleus corresponds with the cell-changes seen by NAGEOTTE and his pupils after grafting parcels of the nervous system in living tissue. Cells, surviving in this grafted nervous system have nearly the same aspect.

Physics. — *Propriétés paramagnétiques de cristaux de terres rares. II*¹⁾.

Par H. A. KRAMERS.

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

§ 4. *Le paramagnétisme d'une poudre cristalline, en particulier celui de CeF_3 .*

L'équation séculaire de notre problème de la perturbation électrique et magnétique:

$$D \equiv |\Delta \delta_{m'm} - V_{m'm} - W_{m'm}| \equiv |(\Delta - \Delta_{\mu}^0) \delta_{\mu'\mu} - W_{\mu'\mu}| = 0 \quad . \quad (33)$$

a $2j + 1$ racines, que nous désignons par Δ_{λ} ($\lambda = \pm |\mu|$, $\mu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \dots j$). La „somme d'états” S sera donnée par:

$$S = \sum_{\lambda} e^{\frac{-\Delta_{\lambda}}{kT}} = \frac{1}{2\pi i} \int e^{\frac{-x}{kT}} \left(\sum_{\lambda} \frac{1}{x - \Delta_{\lambda}} \right) dx = \frac{1}{2\pi i} \int e^{\frac{-x}{kT}} d \log D \quad . \quad (34)$$

où T désigne la température, k la constante de BOLTZMANN.

L'intégrale s'étend le long d'un contour fermé dans le plan complexe des x , qui renferme toutes les racines de D . Pour les petites valeurs de H , on peut développer S selon des polynômes homogènes S_{2n} de degré $2n$ par rapport à H_x, H_y, H_z ($n = 0, 1, 2 \dots$)

$$S = S_0 + S_2 + \dots \quad , \quad S_0 = \sum_{\mu} e^{-\frac{\Delta_{\mu}^0}{kT}} \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

La contribution d'un ion magnétogène à l'énergie libre du cristal est égal à $-kT \log S$. La partie de cette énergie, qui est proportionnelle à H^2 sera donnée par $-kT S_2/S_0$. Si l'on prend la moyenne de cette grandeur par rapport à toutes les directions de \vec{H} , en tenant H constant, on obtient une expression que nous désignons par $-\frac{1}{2} \chi H^2$. La grandeur χ sera la contribution à la susceptibilité de la poudre cristalline qui est apportée par un seul ion de l'espèce considérée. En désignant la moyenne par une barre en haut, nous avons donc:

$$\chi = \frac{2kT}{H^2} \cdot \frac{S_2}{S_0} \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

¹⁾ Comparez la première partie de cet article, Proc. Amst. **35**, 1272, 1932.

Si l'on calcule S_2/S_0 à l'aide des $W_{\mu'\mu}$ qui figurent dans la seconde expression pour D que donne (33), on arrive aisément à la formule donnée par VAN VLECK (voir son livre, p. 192). Cependant, en nous servant de la première expression pour D qui correspond à la forme sous laquelle se présente le problème de la perturbation au début, nous pourrions calculer χ sans avoir recours aux coefficients $a_m^{0,\mu}$ qui servent à calculer les $W_{\mu'\mu}$ à l'aide des $W_{m'm}$. En effet, en développant D d'une manière analogue au développement de S , nous aurons :

$$D = D_0 + D_2 + \dots$$

où

$$D_0 = |\Delta \delta_{m'm} - V_{m'm}| = \prod_{\mu=-j}^{\mu=j} (\Delta - \Delta_\mu^0) \dots \dots \dots (37)$$

$$\bar{D}_2 = -H^2 P(\Delta) \dots \dots \dots (38)$$

Il y a deux espèces de termes en D_2 qui ne s'annulent pas quand on prend la moyenne, à savoir H_z^2 multiplié par une combinaison linéaire de $j(2j+1)$ sous-déterminantes de D_0 d'ordre $2j-1$, et $(H_x + iH_y)(H_x - iH_y)$ multiplié par une combinaison de $4j^2$ sous-déterminantes de cet ordre. Comme $\overline{H_z^2} = \frac{1}{3} H^2$, $\overline{(H_x + iH_y)(H_x - iH_y)} = \frac{2}{3} H^2$, on trouve que $P(\Delta)$ dans (38) représente un certain polynôme de degré $2j-1$. Un petit calcul montre que le coefficient de Δ^{2j-1} , est égal à $\frac{1}{6}(2j+1)j(j+1)g^2\mu_B^2$, tandis que le coefficient de Δ^{2j-2} est égal à celui de Δ^{2j-1} multiplié par $-\frac{2j-1}{2j+1}s$, où s désigne la somme des éléments diagonaux de la matrice $V_{m'm}$:

$$s = \sum_{\mu=-j}^{+j} V_{m'm} = \sum_{\mu} \Delta_{\mu}^0 \dots \dots \dots (39)$$

$$P(\Delta) = \frac{1}{6}(2j+1)j(j+1)g^2\mu_B^2 \left(\Delta^{2j-1} - \frac{2j-1}{2j+1}s\Delta^{2j-2} + \dots \right). \quad (40)$$

À l'aide de (34) on trouve

$$\bar{S}_2 = \frac{1}{2\pi i} \int e^{\frac{-x}{kT}} d\frac{\bar{D}_2}{D_0} = \frac{-H^2}{2\pi i k T} \int \frac{P(x)}{D_0(x)} e^{\frac{-x}{kT}} dx \dots \dots (41)$$

Ce résultat est tout à fait général. Il s'applique à toutes valeurs de j , demi-impaires et entières; il est valable encore quand $D_0(x)$ possède des

racines d'une multiplicité quelconque et quand P a des racines en commun avec D_0 . Pour les grandes valeurs de x on aura le développement:

$$\frac{P(x)}{D_0(x)} = \frac{1}{6} (2j+1)j(j+1)g^2\mu_B^2 \left\{ \frac{1}{x^2} - \left(\frac{2j-1}{2j+1} - 1 \right) s \frac{1}{x^3} + \dots \right\}$$

$$\frac{\bar{S}_2}{H^2} = \frac{(2j+1)j(j+1)g^2\mu_B^2}{6(kT)^2} \left(1 - \frac{s}{2j+1} \cdot \frac{1}{kT} + \dots \right), S_0 = (2j+1) - \frac{s}{kT} \dots$$

$$\chi = \frac{g^2 j(j+1)\mu_B^2}{3kT} + \frac{\text{const.}}{(kT)^3} + \dots \quad (42)$$

Le terme en $\frac{1}{kT}$ correspond à la susceptibilité d'un ion libre qui figure dans la théorie de HUND. Le terme en $1/(kT)^2$ est nul, ce qui est conforme au résultat signalé récemment par Mr. GORTER¹⁾ et par Mrs. PENNEY et SCHLAPP²⁾.

Si j est demi-impair on trouve, en tenant compte de la duplicité des racines de D_0 :

$$\chi = - \frac{2}{S_0} \sum_{\mu=1/2}^j \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{P(x)}{\prod'_{\mu' \neq |\mu|} (x - \Delta_{\mu'}^0)^2} e^{-\frac{x}{kT}} \right) \right\}_{x = \Delta_{\mu}^0}$$

$$= \frac{2}{S_0} \sum_{\mu=1/2}^j \left\{ \frac{1}{kT} \frac{P(\Delta_{\mu}^0)}{\prod'_{\mu'} (\Delta_{\mu}^0 - \Delta_{\mu'}^0)^2} - \frac{d}{d\Delta_{\mu}^0} \left(\frac{P(\Delta_{\mu}^0)}{\prod'_{\mu'} (\Delta_{\mu}^0 - \Delta_{\mu'}^0)^2} \right) \right\} e^{\frac{\Delta_{\mu}^0}{kT}} \quad (43)$$

Ce résultat n'est plus valable si quelques-uns parmi les Δ_{μ}^0 se confondent. Dans l'expression entre accolades on reconnaît les termes qui figurent dans la formule générale de VAN VLECK.

Nous avons appliqué la formule (43) à la susceptibilité du CeF_3 qui a été mesurée par DE HAAS et GORTER (loc. cit). L'ion libre du Ce^{++} correspond à $j=5/2$, $g=6/7$. Le cristal appartient au système hexagonal; selon OFTEDAL³⁾ la structure du réseau est probablement telle que le champ électrique qui agit sur un ion métallique possède à peu près un axe trigonal. En conséquence de cette symétrie, combinée avec les con-

¹⁾ C. J. GORTER, Dissertation Leiden 1932.

²⁾ W. G. PENNEY et R. SCHLAPP, Phys. Rev. **41**, 194, 1932.

³⁾ I. OFTEDAL, Zs. für Phys. Chem. B. **5**, 272, 1929; **13**, 190, 1931. Dans le premier de ces articles, la structure du réseau était supposée un peu plus compliquée que dans le second sur lequel nous nous basons. D'après ce que dit MR. OFTEDAL, il est toutefois certain que la symétrie trigonale du champ autour d'un ion métallique n'est pas rigoureusement remplie.

sidérations du § 2, les seuls termes V'' qui peuvent figurer dans (7a) sont $V_0^0, V_2^0, V_4^0, V_4^3$. Nous pourrions choisir V_0^0 arbitrairement sans que le résultat sera changé. Si l'on choisit pour l'axe des z l'axe trigonal, la déterminante (33) peut donc être mise sous la forme suivante:

$\begin{smallmatrix} m' \\ m \end{smallmatrix}$	$-5/2$	$-3/2$	$-1/2$	$1/2$	$3/2$	$5/2$
$-5/2$	$a - \frac{5}{2}(z) - \Delta$	$\frac{1}{2}(u)\sqrt{5}$	0	c	0	0
$-3/2$	$\frac{1}{2}(v)\sqrt{5}$	$b - \frac{3}{2}(z) - \Delta$	$\frac{1}{2}(u)\sqrt{8}$	0	0	0
$-1/2$	0	$\frac{1}{2}(v)\sqrt{8}$	$-a - \frac{1}{2}(z) - \Delta$	$\frac{3}{2}(u)$	0	$-c$
$1/2$	c^*	0	$\frac{3}{2}(v)$	$-a + \frac{1}{2}(z) - \Delta$	$\frac{1}{2}(u)\sqrt{8}$	0
$3/2$	0	0	0	$\frac{1}{2}(v)\sqrt{8}$	$b + \frac{3}{2}(z) - \Delta$	$\frac{1}{2}(u)\sqrt{5}$
$5/2$	0	0	$-c^*$	0	$\frac{1}{2}(v)\sqrt{5}$	$a + \frac{5}{2}(z) - \Delta$

(44)

$$(z) = g \mu_B H_z = \frac{6}{7} \mu_B H_y ; (u) = g \mu_B (H_x + i H_y) ; (v) = g \mu_B (H_x - i H_y).$$

La susceptibilité ne dépend que de trois constantes a, b, c , dont a et b sont réelles, tandis que c peut être complexe. La susceptibilité ne dépend que de $|c|$; d'ailleurs, en effectuant une rotation convenable autour de l'axe des z , on peut s'arranger de sorte que c devient réel et positif.

Si l'on introduit f à l'aide de

$$f = +\sqrt{a^2 + c c^*}$$

on trouve:

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= (\Delta^2 - f^2)^2 (\Delta - b)^2 \\ D_2 &= -(g \mu_B)^2 \left\{ H_z^2 \left[\frac{9}{4} (\Delta^2 - f^2)^2 + (\Delta - b)^2 \left(\frac{5}{2} (\Delta^2 - f^2) + (2\Delta + 3a)^2 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + (H_x^2 + H_y^2) (\Delta - b) \left[(\Delta^2 - f^2) \frac{13\Delta - 3a}{2} + \frac{9}{4} (\Delta - b) (\Delta - a)^2 \right] \right\} \\ \frac{P_2}{D_0} &= \frac{1}{3} (g \mu_B)^2 \left\{ \frac{9}{4 (\Delta - b)^2} + \frac{5}{2 (\Delta^2 - f^2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{13\Delta - 3a}{(\Delta^2 - f^2) (\Delta - b)} + \frac{(2\Delta + 3a)^2 + \frac{9}{2} (\Delta - a)^2}{(\Delta^2 - f^2)^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$\chi = \frac{1/3 g^2 \mu_B^2}{e^{\nu f} + e^{-\nu f} + e^{-\nu b}} \left\{ \begin{aligned} &\left[\left(\frac{13f + 3a}{6f(f+b)} + \frac{9(f^2 - a^2)}{8f^3} \right) + \nu \left(\frac{3(f+a)^2}{8f^2} + \frac{(2f-3a)^2}{12f^2} \right) \right] e^{\nu f} \\ &+ \left[\left(-\frac{13f-3a}{6f(f-b)} - \frac{9(f^2 - a^2)}{8f^3} \right) + \nu \left(\frac{3(f-a)^2}{8f^2} + \frac{(2f+3a)^2}{12f^2} \right) \right] e^{-\nu f} \\ &+ \left[\frac{13b-3a}{3(f^2-b^2)} + \frac{3}{4} \nu \right] e^{-\nu b} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$\nu = \frac{1}{kT}$

On peut déterminer a , b et f de façon que (46) correspond exactement aux valeurs expérimentales de DE HAAS et GORTER. Nous avons dressé un graphique qui donne χ comme fonction de $1/T$. Pour les trois valeurs les plus petites de T ($14^{\circ}.48$, $17^{\circ}.15$, $20^{\circ}.42$) les valeurs mesurées sont situées avec grande précision sur la droite

$$\chi = \frac{a}{T} + \beta \quad a N = 12,48 \cdot 10^{-4} \quad \beta N = 14,6 \cdot 10^{-6}$$

où N est le nombre d'atomes par unité de volume. Or, en admettant que le niveau fondamental correspond à $\Delta = -f$, ces deux termes correspondent aux termes dans le coefficient de $e^{\nu f}$ dans (46). À l'aide de a on trouvera donc le rapport $\frac{a}{f}$, tandis que β nous permet de trouver une simple relation entre f et b . Si l'on choisit ces grandeurs de sorte que la courbe théorique passe par le point mesuré à $T = 203^{\circ}.8$, on trouve qu'elle passe par tous les points mesurés. Il est curieux de remarquer que les mesures sont représentées avec assez grande précision si l'on prend pour les rapports a/f et b/f les valeurs simples:

$$\frac{a}{f} = -\frac{1}{3} \quad \frac{b}{f} = 7 \text{ ou } -\frac{1}{2} \quad \frac{f+b}{2f} = 4 \text{ ou } \frac{1}{4} \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Les valeurs correspondantes de f sont

$$f = 81.5 \text{ cm}^{-1} \text{ ou } 4 \times 81.5 \text{ cm}^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Dans les deux cas les trois niveaux en lesquels l'état de l'ion libre est décomposé ont exactement la même position relative, que nous avons indiquée dans la figure suivante:

$$\begin{array}{l} \text{III} \text{ ————— } \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{III} \\ \text{II} \\ \text{I} \end{array}} \right\} 489 \text{ cm}^{-1} \\ \text{II} \text{ ————— } \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{III} \\ \text{II} \\ \text{I} \end{array}} \right\} 163 \text{ cm}^{-1} \\ \text{I} \text{ ————— } \end{array}$$

Pour $a/f = -1/3$, la formule (46) reste la même quand on interchange les deux niveaux les plus élevés. En effet, si nous posons:

$$\frac{a}{f} = -\frac{1}{3} \quad \frac{f+b}{2f} = \zeta^2 \quad \sqrt{2f(f+b)} = K,$$

la formule (46) prend la forme:

$$\chi = \frac{g^2 \mu_B^2}{3K} \times \left\{ \begin{array}{l} 2(\zeta + \zeta^{-1}) + \frac{1}{2}K\nu + \left(2\left(-\zeta + \frac{7/6}{\zeta - \zeta^{-1}} \right) + \frac{3}{4}K\nu \right) e^{-K\nu\zeta^{-1}} + \left(2\left(-\zeta^{-1} + \frac{7/6}{\zeta^{-1} - \zeta} \right) + \frac{3}{4}K\nu \right) e^{-K\nu\zeta} \\ 1 + e^{-K\nu\zeta^{-1}} + e^{-K\nu\zeta} \end{array} \right\} \quad (49)$$

Avec $\zeta = 2^{\pm 1}$, ce qui correspond à peu près à la courbe expérimentale, cette formule se réduit à :

$$\chi = \frac{g^2 \mu_B^2}{3K} \frac{(5 + \frac{1}{2} K\nu) + (-\frac{2}{9} + \frac{3}{4} K\nu)e^{-\frac{K\nu}{2}} + (-\frac{2}{9} + \frac{3}{4} K\nu)e^{-2K\nu}}{1 + e^{-\frac{K\nu}{2}} + e^{-2K\nu}} \quad (50)$$

dans laquelle il faudra poser $g = \frac{6}{7}$, $K = 326 \text{ cm}^{-1}$. Entre 100° et 300° la courbe qui représente χ^{-1} comme fonction de T est pratiquement une droite, qui est donnée par

$$\chi^{-1} = \frac{3k(T + \theta)}{\frac{6}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot g^2 \mu_B^2} \quad (50a)$$

avec $\theta = 62^\circ$, bien que la constante de WEISS θ n'admette pas une interprétation simple ¹⁾. A 100° la valeur de $kT = 70 \text{ cm}^{-1}$ est même plus petite que la distance 163 cm^{-1} des deux niveaux les plus bas. Ce résultat est tout à fait analogue à celui de PENNEY et SCHLAPP (loc. cit.) qui ont pu expliquer l'aimantation des sulfates de *Pr* et *Nd* en introduisant comme champ électrique un champ de symétrie cubique convenablement choisi. Aussi dans leurs calculs les courbes qui représentent χ^{-1} comme fonction de T se comportent conformément à la loi de CURIE-WEISS dans la région des températures élevées, bien que kT reste encore plus petit que la distance des niveaux. Ces résultats deviennent plausibles quand on admet que la fonction $\chi^{-1}(T)$ est représentée par une courbe moue; comme cette courbe ne se confondra avec la droite asymptotique $\chi^{-1} = T/C$ qu'à des températures très élevées, elle aura la tendance, aussitôt que la région des anomalies cryogènes sera passée, d'être parallèle à cette asymptote.

Tandis que PENNEY et SCHLAPP ont dû se baser sur un champ hypothétique, qui peut-être diffère assez du champ qui règne dans les réseaux non-réguliers des sulfates mentionnés, notre calcul nous a permis d'évaluer les trois constantes qui interviennent dans le cas du Ce F_3 , toutefois si nous faisons abstraction de la duplicité curieuse de nos résultats, ainsi que de l'écart de la symétrie trigonale signalé par OFTEDAL.

§ 5. La rotation paramagnétique dans les cristaux, en particulier celle dans la tysonite.

Pour un cristal où tous les atomes magnétogènes sont les mêmes et

¹⁾ Si l'on considère θ dans (50a) comme fonction de T , on trouve à l'aide de (50) les valeurs suivantes de $\theta(T)$,

$T = 50^\circ$	100°	150°	200°	300°	400°	500°	1000°	2000°
$\theta = 51^\circ$	61°	$61,5^\circ$	61°	56°	49°	43°	29°	13°

où chacun est influencé par le même champ électrique, le vecteur de rotation dans un champ magnétique sera donné par :

$$\vec{\Omega} = N \frac{\sum_{\lambda} \vec{\omega}_{\lambda} e^{-\frac{\Delta_{\lambda}}{kT}}}{\sum_{\lambda} e^{-\frac{\Delta_{\lambda}}{kT}}} \quad (51)$$

N est le nombre d'atomes magnétogènes par unité de volume; les sommations s'étendent à tous les niveaux λ dans lequel l'état fondamental de l'ion libre est décomposé.

On peut donner à (51) une forme analogue à l'expression (41) qui se rapporte à la susceptibilité,

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} &= \frac{N}{2\pi i S_0} \int e^{-\frac{x}{kT}} \left(\sum_{\lambda} \frac{\vec{\omega}_{\lambda}}{x - \Delta_{\lambda}} \right) dx = \frac{N}{2\pi i S_0} \int e^{-\frac{x}{kT}} \text{Spur} \frac{\vec{\omega}}{x - V - W} dx \\ &= \frac{N}{2\pi i S_0} \int e^{-\frac{x}{kT}} \frac{\vec{Q}(x)}{D(x)} dx \end{aligned}$$

où $\vec{Q}(x)$ est un polynôme en x , dont le degré ne surpasse pas $2j - 1$ et dont les coefficients sont des vecteurs. Ce polynôme est le coefficient de δ dans l'élaboration de la déterminante :

$$D'(x) \equiv |x - V_{m'm} - W_{m'm} - \delta \vec{\omega}_{m'm}| = D(x) + \delta \vec{Q}(x) + \dots$$

Si j est demi-impair et si tous les niveaux dans l'absence de \vec{H} sont doublement dégénérés, on pourra développer les $\vec{\omega}_{\lambda}$ et les Δ_{λ} suivant les puissances de H

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\lambda} &= \Delta_{\pm|\mu|} = \Delta_{\mu}^0 \pm \Delta_{\mu}^{(1)} + \Delta_{\mu}^{(2)} + \dots \\ \vec{\omega}_{\lambda} &= \vec{\omega}_{\pm|\mu|} = \pm \vec{\omega}_{\mu}^{(0)} + \vec{\omega}_{\mu}^{(1)} \pm \vec{\omega}_{\mu}^{(2)} \end{aligned} \right\} \mu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, j \quad (52)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \sum_{\mu} \Delta_{\mu}^{(2)} = \sum_{\mu} \Delta_{\mu}^{(4)} = \dots \\ 0 &= \sum_{\mu} \omega_{\mu}^{(1)} = \sum_{\mu} \omega_{\mu}^{(3)} = \dots \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Si nous désignons les cosinus de direction de \vec{H} par c_1, c_2, c_3 :

$$c_1 = \frac{H_x}{H} \quad c_2 = \frac{H_y}{H} \quad c_3 = \frac{H_z}{H} \quad (54)$$

on aura :

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\mu}^{(1)} &= a_{\mu} H = H \sqrt{\sum_{pq} a_{pq}^{(\mu)} c_p c_q}, \quad \Delta_{\mu}^{(2)} = b_{\mu} H^2 = H^2 \sum_{pq} b_{pq}^{(\mu)} c_p c_q \text{ etc.} \\ \vec{\omega}_{\mu}^{(0)} &= -\vec{A}_{\mu} = -\frac{\sum \vec{A}_p^{(\mu)}}{a_{\mu}} c_p, \quad \vec{\omega}_{\mu}^{(1)} = \vec{B}_{\mu} H = H \sum \vec{B}_p^{(\mu)} c_p \\ &\quad, \quad \vec{\omega}_{\mu}^{(2)} = -\vec{C}_{\mu} H^2, \text{ etc.} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

où les grandeurs $a_{pq}^{(\mu)}$, $b_{pq}^{(\mu)}$, $\vec{A}_p^{(\mu)}$, $\vec{B}_p^{(\mu)}$ sont des constantes caractéristiques de l'ion perturbé par le champ électrique, et dont le calcul a été indiqué dans § 2 et § 3. Avec ces notations, la formule (51) prend la forme approximative ¹⁾

$$\vec{\Omega} = N \frac{\sum_{\mu} \left\{ (\vec{A}_{\mu} + H^2 \vec{C}_{\mu}) \mathfrak{I} \hbar \frac{a_{\mu} H}{k T} + H \vec{B}_{\mu} \mathfrak{I} \hbar \frac{a_{\mu} H}{k T} \right\} e^{\frac{-\Delta_{\mu}^0 - H^2 b_{\mu}}{k T}}}{\sum_{\mu} \mathfrak{I} \hbar \frac{a_{\mu} H}{k T} e^{\frac{-\Delta_{\mu}^0 - H^2 b_{\mu}}{k T}}} \quad (56)$$

Pour des températures tellement basses, qu'on n'a besoin que de regarder le niveau le plus bas, cette formule se réduit à la suivante:

$$\vec{\Omega} = N \left\{ (\vec{A} + H^2 \vec{C}) \mathfrak{I} \hbar \frac{a H}{k T} + H \vec{B} \right\} \quad (57)$$

où nous avons omis l'indice qui correspond à ce niveau.

Dans la région des valeurs du champ où $\vec{\Omega}$ est linéaire en H on trouve

$$\vec{\Omega} = N \frac{\sum (\vec{A}_{\mu} a_{\mu} + \vec{B}_{\mu} k T) e^{\frac{-\Delta_{\mu}^0}{k T}}}{\sum e^{\frac{-\Delta_{\mu}^0}{k T}}} \cdot \frac{H}{k T} \quad (58)$$

qui pour les basses températures se réduit à

$$\vec{\Omega} = N (\vec{A} a + \vec{B} k T) \frac{H}{k T} \quad (59)$$

Ce sont bien les termes en \vec{B}_{μ} , qui correspondent aux termes de VAN VLECK dans la théorie de la susceptibilité. Il paraît qu'ils jouent un rôle important dans l'analyse de certaines expériences récentes de BECQUEREL et DE HAAS. Dans cet ordre d'idées il sera bon de se rappeler que les $\vec{\omega}_{m'm}$ et conséquemment les \vec{A} , \vec{B} etc. peuvent dépendre encore de la température à cause de l'agitation thermique du réseau. Cette agitation peut aussi influencer un peu le champ électrique, c. à d. les $V_{m'm}$ et les Δ_{μ} ; cependant on prévoit que l'influence de la température sur les $\vec{\omega}_{m'm}$ pourra devenir beaucoup plus importante, parce que ces grandeurs dépendent des niveaux excités de l'ion.

Si nous appliquons les formules de ce paragraphe à la rotation paramagnétique du Ce F_3 , on s'attendra que la prédiction théorique soit

¹⁾ Nous avons omis les $\Delta_{\mu}^{(3)}$ et les $\omega_{\mu}^{(3)}$ et non pas les $\omega_{\mu}^{(2)}$ quoique les $\Delta^{(3)}$ et les $\omega^{(3)}$ donnent lieu à des corrections qui sont du même ordre en H . Dans beaucoup d'applications cette omission paraît être justifiée.

valable aussi pour la rotation dans la tysonite ($La + Ce, F_3$) qui a fait l'objet de tant de recherches de BECQUEREL et DE HAAS. Admettons pour le moment, que la symétrie du champ qui agit sur un ion soit rigoureusement trigonale, de sorte qu'on pourra se baser sur les calculs du § précédent. Tout d'abord on prévoit que dans la région au dessous de 20° c'est seulement le niveau le plus bas (I dans la figure p. 21) qui intervient, de sorte qu'on pourra appliquer les formules (57) et (59). Or on trouve la valeur de a qui correspond à ce niveau à l'aide de (45), en posant

$$D_{0(\Delta=-f+aH)} + D_{2(\Delta=-f)} = 0$$

ce qui donne:

$$a^2 H^2 = (g \mu_B)^2 \left[H_z^2 \left(\frac{2f-3a}{2f} \right)^2 + \frac{9}{4} (H_x^2 + H_y^2) \left(\frac{f+a}{2f} \right)^2 \right]$$

En substituant $a = -\frac{1}{3}f$ on trouve:

$$aH = \frac{6}{7} \mu_B \left[\frac{9}{4} H_z^2 + \frac{1}{4} (H_x^2 + H_y^2) \right]^{1/2} \dots \dots \dots (60)$$

Le moment magnétique parallèle à l'axe est donc $\mu_{||} = \frac{9}{7} \mu_B \frac{H_{||}}{H}$ et celui perpendiculaire à l'axe est $\mu_{\perp} = \frac{3}{7} \mu_B \frac{H_{\perp}}{H}$ ¹⁾. Quant à la direction

des vecteurs \vec{A} et \vec{B} la symétrie trigonale du champ électrique exige immédiatement, qu'ils soient situés tous les deux dans le plan qui contient la direction de l'axe et la direction du champ, c. à d. que \vec{A}_3 et \vec{B}_3 dans (55) sont parallèles à l'axe 3 (l'axe du cristal), tandis que \vec{A}_1 et \vec{B}_1 sont parallèles à l'axe 1, et \vec{A}_2 et \vec{B}_2 parallèles à l'axe 2, $|A_1|$ étant égal à $|A_2|$ et $|B_1|$ égal à $|B_2|$. Dû à la circonstance que les c_p entrent linéairement dans les expressions (55) pour \vec{A} et \vec{B} , la symétrie trigonale du champ, et a fortiori la symétrie hexagonale du cristal, ne peut pas se réfléchir dans la loi selon laquelle \vec{A} et \vec{B} dépendent de la direction de \vec{H} .

Les mesures de la rotation dans la tysonite dans un champ parallèle à l'axe ²⁾ peuvent être représentées par

$$\vec{\Omega} = N \vec{A}' \Im \frac{n \mu_B H}{k T} \dots \dots \dots (61)$$

1) Pour des deux autres niveaux on trouve par le même procédé

$$\begin{aligned} \Delta^0 = +f \quad \mu_{||} &= \frac{3}{7} \mu_B \frac{H_{||}}{H} \quad \mu_{\perp} = \frac{6}{7} \mu_B \frac{H_{\perp}}{H} \\ \Delta^0 = b \quad \mu_{||} &= \frac{9}{7} \mu_B \frac{H_{||}}{H} \quad \mu_{\perp} = 0 \end{aligned}$$

mais on ne saura pas dire lequel des deux correspond au niveau II et lequel au niveau III.

2) J. BECQUEREL et W. J. DE HAAS. Zs. f. Phys. 52, 678, 1928.

où \vec{Q} et \vec{A} sont tous les deux parallèles à l'axe, et où n surpasse légèrement l'unité ($n = 1, 0 \rightarrow 1, 1$). D'après ce que nous avons dit plus haut, la valeur de a qu'il faudrait substituer dans (57) serait $a = \frac{9}{7} \mu_B = 1,286 \mu_B$. Peut-être ce désaccord est-il dû au fait que la formule empirique (61) ne tient pas compte des termes en \vec{B} et \vec{C} . La valeur de \vec{A} dans cette formule dépend encore de la température d'une façon qu'il paraît difficile d'expliquer sur la base de (58) si l'on suppose \vec{A} et \vec{B} indépendants de la température.

Les mesures dans un champ perpendiculaire à l'axe ont démontré l'existence d'une rotation aussi dans ce cas.¹⁾ BECQUEREL et DE HAAS ont trouvé qu'à basses températures cette rotation n'est plus rigoureusement linéaire en H dans les champs les plus forts de l'expérience. Les courbes expérimentales correspondent avec grande précision à une formule du type $\alpha H + \beta H^3$; on peut les décrire à l'aide d'une expression du type (61). Ce qui est remarquable, c'est que pour un champ parallèle à l'axe binaire diagonal et pour un autre parallèle à l'apothème, les rotations sont différentes, aussi bien quant au terme αH que quant au terme βH^3 . Cette différence de a pour les deux directions différentes est inexplicable par la théorie que nous avons esquissée, parce que \vec{A} et \vec{B} dans (58), ne peuvent pas réfléchir la symétrie hexagonale du cristal; la différence des β est également inexplicable²⁾. Les valeurs de n qu'il faut introduire dans (61) pour représenter les mesures sont 0.69 et 0.57 pour les deux directions. Aucune de ces valeurs ne s'accorde avec la valeur théorique de a dans (57) pour un champ transversal que nous avons déduite plus haut ($a = \frac{3}{7} \mu_B = 0.43 \mu_B$); toutefois l'écart n'est pas énorme; il s'explique peut-être en partie si l'on tient compte des termes en \vec{B} et \vec{C} dans (56).

En somme il faut conclure que la théorie donnée plus haut, quoique plus satisfaisante que celle donnée antérieurement (voir les art. I et II), n'explique pas tous les détails de l'expérience. Comme de nouvelles mesures sur la tysonite viennent d'être faites au laboratoire de Leiden, nous ne voulons pas discuter en ce moment les causes différentes qui pourraient expliquer les écarts.

¹⁾ J. BECQUEREL et W. J. DE HAAS. Proc. Amsterdam **33**, 937, 1930.

²⁾ Si l'on tient compte de l'écart de la symétrie trigonale, qui selon OFTEDAL doit exister dans le réseau, la différence des a reste toujours inexplicable; la partie de la rotation qui est linéaire en H est toujours représentée par (59) où $\vec{A} \propto H$ et $\vec{B} \propto H$ sont des fonctions vectorielles linéaires de \vec{H} , qui ne peuvent pas montrer une symétrie hexagonale. Toutefois on comprend de cette manière que les deux valeurs de a peuvent être différentes.

Mathematics. — *Eine Abbildung der Kugeln des Raumes auf den Strahlenraum.* Von Prof. JAN DE VRIES.

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

§ 1. Um zunächst zu einer Abbildung der Kugeln des Raumes auf die Punktepaare einer Ebene zu gelangen, betrachte ich vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 , in allgemeiner Lage, und bestimme ihre Potenzen p_1, p_2, p_3, p_4 in Bezug auf eine Kugel β . In der Ebene ε bestimmen die Koordinaten $x_1 = p_1, y_1 = p_2$ und $x_2 = p_3, y_2 = p_4$ zwei Punkte B_1 und B_2 , welche der Kugel β als Abbildung entsprechen sollen. Jedem Punktepaar entspricht offenbar eine gewisse Kugel. Sind die betreffenden Koordinaten alle positiv und α_k die Kugeln mit Mittelpunkt A_k und Radius $\sqrt{p_k}$, so sind die Punkte B_k die Bilder der Kugel β , welche die vier Kugeln α_k orthogonal schneidet. Wenn z.B. p_1 negativ sein sollte, so wird β die Kugel α_1 , mit dem Radius $\sqrt{-p_1}$, diametral schneiden.

Wenn die Bildpunkte zusammenfallen, wonach $p_1 = p_3$ und $p_2 = p_4$ wäre, so liegt der Mittelpunkt der Kugel β auf der Schnittgeraden s der Ebenen, welche $A_1 A_3$ und $A_2 A_4$ halbieren und sie orthogonal treffen. Es gibt somit ∞^1 Büschel konzentrischer Kugeln, denen zusammenfallende Bildpunkte entsprechen.

Ein Kugelbüschel wird ersichtlich abgebildet auf zwei projektive Punkt-reihen ¹⁾).

§ 2. Die Punktepaare B_1, B_2 sollen nunmehr als Bilder der Geraden des Raumes betrachtet werden. Es seien γ_1, γ_2 zwei Ebenen, O ein beliebig gewählter Punkt, C_1, C_2 die Schnittpunkte der Strahlen OB_1, OB_2 mit den Ebenen γ_1, γ_2 ; der Geraden $C_1 C_2$ sollen B_1, B_2 als Bildpunkte zugeordnet werden.

Ich betrachte nun die Gerade c ($C_1 C_2$) als Bild der Kugel β , und erhalte damit eine i.A. eindeutige Abbildung des Kugelraumes auf den Strahlenraum.

Die Strahlen c^* durch O haben zusammenfallende Bildpunkte, entsprechen demnach den Kugeln β^* , deren Mittelpunkte auf der Geraden s liegen.

Wenn ein Strahl c^* die Schnittlinie g der Ebenen γ_1, γ_2 trifft, so ist seine Spur B^* das Bild sämtlicher Geraden, welche g in ihrem Schnittpunkt mit OB^* treffen.

Einem Kugelbüschel entspricht i.A. eine quadratische Regelschar; aus der Projektivität der durch B_1 und B_2 beschriebenen Punktreihen ergibt sich nämlich, dass auch C_1 und C_2 projektive Reihen durchlaufen.

¹⁾ Sind p'_1 und p''_1 die Potenzen der Kugeln β' und β'' im Punkte A_1 , so erhält man für den durch β' und β'' bestimmten Büschel $p_1 = (\lambda' p' + \lambda'' p'') : (\lambda' + \lambda'')$ und somit $x_1 = (\lambda' x'_1 + \lambda'' x''_1) : (\lambda' + \lambda'')$ u.s.w.

Mathematics. — *Ueber die Eigenvektoren und Eigenräume einer Matrix.*
 Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

Eine n -dimensionale quadratische Matrix $A = \| a_i^k \|$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) erzeugt in einem affinen Raume $O(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine lineare Vektortransformation, indem dem Vektor x der Vektor Ax mit den Komponenten $a_i^k x_k$ zugeordnet wird. Liegen x und Ax auf derselben Geraden durch den Ursprung O , so heisst x ein *Eigenvektor* von A . Bleibt ein durch O gehender d -dimensionaler linearer Raum bei der Abbildung A invariant, so heisst er *Eigenraum* (oder Fundamentalraum).

Ich gebe im Folgenden eine natürliche Konstruktion der zu einer Matrix A gehörigen Eigenvektoren und Eigenräume, die nur voraussetzt, dass man die Eigenwerte von A kennt.

Für einen Eigenvektor x gilt $Ax = \lambda x$, d.h. $(\lambda E - A)x = 0$; λ muss also ein Eigenwert von A , d.h. eine Wurzel von

$$D_n(\lambda) = \det(\lambda E - A) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \dots (\lambda - \lambda_l)^{r_l} = 0. \quad (1)$$

sein. Hierbei ist $\lambda_i \neq \lambda_k$, λ_i ist r_i -fache Wurzel und $r_1 + r_2 + \dots + r_l = n$. Wir nennen

$$\alpha_i^k = \lambda \delta_i^k - a_i^k = \alpha_i^k(\lambda). \quad (2)$$

die Elemente der λ -Matrix $\lambda E - A$ und

$$B(\lambda) = \| \beta_i^k(\lambda) \| \quad (3)$$

die Adjungierte von $\lambda E - A$, sodass also

$$(\lambda E - A)B = D_n(\lambda) \cdot E \quad (4)$$

ist.

Sei nun zunächst λ_1 ein *einfacher* Eigenwert. Dann ist $D_n(\lambda_1) = 0$, $D'_n(\lambda_1) \neq 0$, $B(\lambda_1) \neq 0$ und aus (4) folgt für $\lambda = \lambda_1$:

$$\lambda_1 B(\lambda_1) = A B(\lambda_1).$$

Für einen willkürlichen Vektor ξ gilt dann $\lambda_1 B(\lambda_1)\xi = A B(\lambda_1)\xi$, d.h.

$$x = B(\lambda_1)\xi \quad (5)$$

ist ein zum Eigenwerte λ_1 gehöriger Eigenvektor. Man beweist leicht, dass es, von einem konstanten Faktor abgesehen, zu jedem einfachen Eigenwerte nur *einen* Eigenvektor gibt.

Die Darstellung (5) des Eigenvektors x kann man auch aus der Determinante

$$B_{\xi}^u = - \begin{vmatrix} a_1^1 & & & \xi_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_n^n & \xi_n \\ u^1 & \dots & u^n & 0 \end{vmatrix} \dots \dots \dots (6)$$

entnehmen: die x_i sind die Koeffizienten von u^i in dieser Determinante. Und dass $Ax = \lambda_1 x$ wird, erkennt man so: die Komponenten von Ax erhält man, indem man in (6) u^i durch $a_s^i u^s = \lambda_1 u^i - a_s^i u^s$ ersetzt.

Wir zeigen jetzt, dass die Darstellung (6) auf mehrfache Eigenwerte verallgemeinert werden kann. Es sei λ_1 ein r_1 -facher Eigenwert mit $r_1 > 1$. Die Normalform von JORDAN der Matrix A hat dann ein erstes Land mit r_1 Reihen, das in h_1 Felder mit je $e_{11}, e_{21}, \dots, e_{h_1 1}$ Reihen zerfällt:

$$\left| \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} \lambda_1 - 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 - 1 \end{array} \right| e_{11} \\ \hline \left| \begin{array}{ccc} \lambda_1 - 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 - 1 \end{array} \right| e_{21} \\ \hline \vdots \\ \left| \begin{array}{ccc} \lambda_1 - 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 - 1 \end{array} \right| e_{h_1 1} \end{array} \right| r_1$$

$$e_{11} \geq e_{21} \geq \dots \geq e_{h_1 1} \geq 1$$

$$e_{11} + e_{21} + \dots + e_{h_1 1} = r_1$$

Alle nicht angeschriebenen Elemente sind Null.

Sei $M_k(\lambda)$ ein k -reihiger Minor von $\|a_i^k\| = \det(\lambda E - A)$. Dann ist

$$\begin{array}{ll}
 (\lambda - \lambda_1)^{r_1} & \text{die höchste Potenz von } (\lambda - \lambda_1), \text{ die alle } M_n(\lambda) \text{ teilt,} \\
 (\lambda - \lambda_1)^{r_1 - e_{11}} & \text{,, ,, ,, ,, } (\lambda - \lambda_1), \text{ ,, ,, } M_{n-1}(\lambda) \text{ ,, ,} \\
 (\lambda - \lambda_1)^{r_1 - e_{11} - e_{21}} & \text{,, ,, ,, ,, } (\lambda - \lambda_1), \text{ ,, ,, } M_{n-2}(\lambda) \text{ ,, ,} \\
 \vdots & \vdots \\
 (\lambda - \lambda_1)^{r_1 - e_{11} - \dots - e_{h_1-1,1}} & \text{die höchste Potenz von } (\lambda - \lambda_1), \text{ die alle } M_{n-h_1+1}(\lambda) \text{ teilt,} \\
 (\lambda - \lambda_1)^0 & \text{,, ,, ,, ,, } (\lambda - \lambda_1), \text{ ,, ,, } M_{n-h_1}(\lambda) \text{ ,, ,}
 \end{array}$$

d.h. alle $M_{n-h_1+1}(\lambda_1)$ sind Null, während nicht alle $M_{n-h_1}(\lambda_1)$ verschwinden. $\|a_i^k(\lambda_1)\|$ hat also den Rang $n - h_1$.

Analog zu (6) konstruieren wir weitere geränderte Determinanten

$$C_{y\xi}^{vu} = + \begin{vmatrix} a_1^1 & & & y_1 & \xi_1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & a_n^n & y_n & \xi_n \\ v^1 & \dots & v^n & 0 & 0 \\ u^1 & \dots & u^n & 0 & 0 \end{vmatrix} = C_i^k u^i \xi_k ; D_{zy\xi}^{wvu} = - \begin{vmatrix} a_1^1 & & & z_1 & y_1 & \xi_1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & a_n^n & z_n & y_n & \xi_n \\ w^1 & \dots & w^n & 0 & 0 & 0 \\ v^1 & \dots & v^n & 0 & 0 & 0 \\ u^1 & \dots & u^n & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = D_i^k u^i \xi_k ;$$

u. s. f.

die, als bilineare Formen in u^i und ξ_k betrachtet, die Matrizen $C(\lambda) = \|C_i^k\|$, $D(\lambda) = \|D_i^k\|$, ... liefern. Für diese Matrizen gelten die Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l}
 (\lambda E - A) \cdot B(\lambda) = D_n(\lambda) \cdot E \\
 (\lambda E - A) \cdot C(\lambda) = \Sigma B(\lambda) \\
 (\lambda E - A) \cdot D(\lambda) = \Sigma C(\lambda) \\
 \vdots
 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Beweis: Die erste dieser Gleichungen ist (4). Bei der zweiten wird C mit $\|a_i^k\|$ linksseitig multipliziert, d.h. man hat in der Determinante $C_{y\xi}^{vu}$ die u^i durch $a_s^i u^s$ zu ersetzen. Die Elemente der Matrix $(\lambda E - A) \cdot C(\lambda)$ sind also die Koeffizienten von $u^i \xi_k$ in

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & & & y_1 & \xi_1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & a_n^n & y_n & \xi_n \\ v^1 & \dots & v^n & 0 & 0 \\ a_s^1 u^s & \dots & a_s^n u^s & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & & & y_1 & \xi_1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & a_n^n & y_n & \xi_n \\ v^1 & \dots & v^n & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -u^i y_i & -u^i \xi_i \end{vmatrix}$$

Entwickeln wir die letzte Determinante nach der letzten Zeile, so erhalten wir die zweite der Gleichungen (8). Analog bei den weiteren Gleichungen.

Jetzt differenzieren wir (8) s -mal nach λ ; dies gibt:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda E - A) \cdot B^{(s)}(\lambda) &= D_n^{(s)}(\lambda) \cdot E - s \cdot B^{(s-1)}(\lambda) \\ (\lambda E - A) \cdot C^{(s)}(\lambda) &= \Sigma B^{(s)}(\lambda) - s \cdot C^{(s-1)}(\lambda) \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

In $(9)_1$ setzen wir der Reihe nach

$$s = r_1 - 1, r_1 - 2, \dots, r_1 - e_{11} + 1, r_1 - e_{11} \quad \text{und} \quad \lambda = \lambda_1.$$

Wegen

$$\left. \begin{aligned} D_n(\lambda_1) &= D'_n(\lambda_1) = \dots = D_n^{(r_1-1)}(\lambda_1) = 0, \quad D_n^{(r_1)}(\lambda_1) \neq 0, \\ B(\lambda_1) &= B'(\lambda_1) = \dots = B^{(r_1-e_{11}-1)}(\lambda_1) = 0, \\ &\quad \text{aber wenigstens ein } B^{(r_1-e_{11})}(\lambda_1) \neq 0, \\ C(\lambda_1) &= C'(\lambda_1) = \dots = C^{(r_1-e_{11}-e_{21}-1)}(\lambda_1) = 0, \\ &\quad \text{aber wenigstens ein } C^{(r_1-e_{11}-e_{21})}(\lambda_1) \neq 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

ergibt sich aus $(9)_1$:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_1 E - A) \cdot B^{(r_1-1)}(\lambda_1) &= -(r_1 - 1) \cdot B^{(r_1-2)}(\lambda_1) \\ \dots \dots \dots \\ (\lambda_1 E - A) \cdot B^{(r_1-e_{11}+1)}(\lambda_1) &= -(r_1 - e_{11} + 1) \cdot B^{(r_1-e_{11})}(\lambda_1) \\ (\lambda_1 E - A) \cdot B^{(r_1-e_{11})}(\lambda_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Aus $(9)_2$ erhalten wir ebenso für

$$s = r_1 - e_{11} - 1, r_1 - e_{11} - 2, \dots, r_1 - e_{11} - e_{21} \quad \text{und} \quad \lambda = \lambda_1:$$

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_1 E - A) \cdot C^{(r_1-e_{11}-1)}(\lambda_1) &= -(r_1 - e_{11} - 1) \cdot C^{(r_1-e_{11}-2)}(\lambda_1), \\ \dots \dots \dots \\ (\lambda_1 E - A) \cdot C^{(r_1-e_{11}-e_{21}+1)}(\lambda_1) &= -(r_1 - e_{11} - e_{21} + 1) \cdot C^{(r_1-e_{11}-e_{21})}(\lambda_1), \\ (\lambda_1 E - A) \cdot C^{(r_1-e_{11}-e_{21})}(\lambda_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

und analog mit den weiteren Gleichungen (9).

Setzen wir jetzt, wenn ξ einen willkürlichen Vektor bedeutet:

$$\left. \begin{aligned} x^{(1)} &= B^{(r_1-1)}(\lambda_1) \cdot \xi, & x^{(2)} &= B^{(r_1-2)}(\lambda_1) \cdot \xi, \dots, & x^{(e_{11})} &= B^{(r_1-e_{11})}(\lambda_1) \cdot \xi; \\ x^{(e_{11}+1)} &= C^{(r_1-e_{11}-1)}(\lambda_1) \cdot \xi, & x^{(e_{11}+2)} &= C^{(r_1-e_{11}-2)}(\lambda_1) \cdot \xi, \dots, & x^{(e_{11}+e_{21})} &= C^{(r_1-e_{11}-e_{21})}(\lambda_1) \cdot \xi; \\ &\dots & & & & \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

so lassen sich die Gleichungen (11) und (12) wie folgt schreiben:

$$\left. \begin{aligned} Ax^{(1)} &= \lambda_1 \cdot x^{(1)} + (r_1 - 1) \cdot x^{(2)} \\ Ax^{(2)} &= \lambda_1 \cdot x^{(2)} + (r_1 - 2) \cdot x^{(3)} \\ &\dots \\ Ax^{(e_{11}-1)} &= \lambda_1 \cdot x^{(e_{11}-1)} + (r_1 - e_{11} + 1) \cdot x^{(e_{11})} \\ Ax^{(e_{11})} &= \lambda_1 \cdot x^{(e_{11})} \\ Ax^{(e_{11}+1)} &= \lambda_1 \cdot x^{(e_{11}+1)} + (r_1 - e_{11} - 1) \cdot x^{(e_{11}+2)} \\ &\dots \\ Ax^{(e_{11}+e_{21})} &= \lambda_1 \cdot x^{(e_{11}+e_{21})} \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

u. s. f.

Man zeigt leicht, dass die Vektoren

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(e_{11})}, x^{(e_{11}+1)}, \dots$$

linear unabhängig sind; sie spannen den zum ersten Lande gehörigen r_1 -dimensionalen Eigenraum auf. Aus (14) entnimmt man dann die zu den Feldern des ersten Landes gehörigen Eigenräume von $e_{11}, e_{21}, \dots, e_{h_1,1}$ Dimensionen.

Mathematics. — Ueber eine algebraische Aufgabe bei der Reduktion von ABELschen Integralen auftretend. (Zweite Mitteilung). Von W. VAN DER WOUDE.

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

§ 1. Die oben genannte Aufgabe, über welche schon eine frühere Mitteilung¹⁾ handelte, ist die folgende.

Gegeben sind drei linear unabhängige quadratische Formen

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= a_0 x^2 + 2 a_1 x y + a_2 y^2 \\ \psi &= b_0 x^2 + 2 b_1 x y + b_2 y^2 \\ \chi &= c_0 x^2 + 2 c_1 x y + c_2 y^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

¹⁾ Proceedings 1931, p. 1264—1270.

Angenommen wird, dass die sechs Nullstellen dieser Formen alle verschieden sind. Gefragt wird:

1. welche Beziehung muss zwischen ihren Koeffizienten bestehen, damit es möglich sei, jede von ihnen mit dem Quadrat einer Linearform, also resp. mit

$$(a_2^+ x - a_1^+ y)^2, (\beta_2^+ x - \beta_1^+ y)^2, (\gamma_2^+ x - \gamma_1^+ y)^2$$

zu multiplizieren, sodass die entstehenden biquadratischen Formen einer und derselben Involution angehören, welche auch ein vollständiges Quadrat

$$\tau = (t_0 x^2 + 2 t_1 xy + t_2 y^2)^2$$

enthält;

2. die genannten Linearformen und τ zu bestimmen.

Die gefragte Beziehung ist in ihrer einfachsten Form von KLUYVER¹⁾ gegeben. In der ersten Mitteilung habe ich die projectiv verschiedenen Formen von φ , ψ und χ angegeben; die gefragte Beziehung bekam eine geometrische Form, äquivalent mit der KLUYVERSchen.

Es war aber dabei angenommen, dass τ zwei verschiedene Nullpunkte hat; jetzt nehme ich an:

τ ist die vierte Potenz einer Linearform.

§ 2. Ich führe wieder die folgenden Bezeichnungen ein.

Die Nullpunkte von φ , ψ und χ seien resp. (A_1, A_2) , (B_1, B_2) , (C_1, C_2) ; die Linearformen haben resp. die Nullpunkte A^+ , B^+ , C^+ . Der einzige Nullpunkt von τ heisst T ; durch eine projektive Transformation bekommt T die Koordinaten $(1, 0)$.

Die oben erwähnte Involution i_4 wird dann dargestellt durch

$$\lambda (p_0 s^4 + 4 p_1 s^3 t + 6 p_2 s^2 t^2 + 4 p_3 s t^3) + \mu t^4 = 0 \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Doppelpunkte dieser Involution werden gefunden aus

$$t^3 J(t) = t^3 (p_0 s^3 + 3 p_1 s^2 t + 3 p_2 s t^2 + p_3 t^3) = 0; \quad . \quad . \quad (3)$$

ausser dem Punkte $T(1, 0)$ findet man noch drei Doppelpunkte $A^+(a_1, a_2)$, $B^+(\beta_1, \beta_2)$, $C^+(\gamma_1, \gamma_2)$, in dem (x, y) System — vor der ausgeführten Transformation — habe ich sie durch (a_1^+, a_2^+) , (β_1^+, β_2^+) , (γ_1^+, γ_2^+) dargestellt.

Wenn man nun die drei Formen von i_4 , welche diese Doppelpunkte enthalten, resp. durch $(a_2 s - a_1 t)^2$, $(\beta_2 s - \beta_1 t)^2$, $(\gamma_2 s - \gamma_1 t)^2$ dividiert, dann sind φ , ψ und χ die Quotienten.

Es ist klar, dass keiner der drei Punkte A^+ , B^+ , C^+ mit T zusammen-

¹⁾ Verslagen Kon. Akad. v. Wetenschappen 26 p. 463.

fallen kann. Fiele einer derselben mit T zusammen, so hätte $J(s, t)$ einen Nullpunkt $(1, 0)$, also wäre dann $p_0 = 0$; aber dann hätten, wie aus (2) folgt, alle Formen der Involution — unter denen auch φ , ψ und χ vorkommen, — denselben Nullpunkt, was entgegen der Voraussetzung ist. Ebenso wenig können zwei der Punkte A^+ , B^+ , C^+ zusammenfallen, weil dann in der Involution nur noch zwei, statt drei, Formen vorkommen, die einen zweifachen Nullpunkt besitzen.

Zuletzt könnte man noch annehmen, dass in (2) $p_0 = p_1 = 0$, sodass jedes Quadrupel von i_4 ein Doppelement enthalten würde; i_4 könnte dann erzeugt werden, indem man die Formen einer quadratischen Involution mit t^2 multipliziert. Dann aber wären φ , ψ und χ Formen dieser quadratischen Involution, also linear abhängig; wieder gegen die Voraussetzung.

§ 3. Ich kann also eine kleine Vereinfachung der Schreibweise anbringen durch

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \alpha, \frac{\beta_1}{\beta_2} = \beta, \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \gamma.$$

Die Koordinaten der Punkte A^+ , B^+ , C^+ sind dann $(\alpha, 1)$, $(\beta, 1)$, $(\gamma, 1)$; α , β und γ sind unter einander verschieden.

Es sind also $(\alpha, 1)$, $(\beta, 1)$, $(\gamma, 1)$ die Wurzeln von

$$p_0 s^3 + 3 p_1 s t^2 + 3 p_2 s t^2 + p_3 t^3 = 0 \quad (p_0 \neq 0).$$

Führt man s' statt s ein durch

$$s' = s + \frac{p_1}{p_0} t$$

dann geht diese Gleichung über in

$$p_0 s'^3 + 3 p'_2 s' t^2 + p'_3 t^3 = 0,$$

d. h., wenn ich die Striche wieder fortlasse, in

$$p_0 s^3 + 3 p_2 s t^2 + p_3 t^3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Von den Wurzeln gilt dann:

$$\Sigma \alpha = 0, \Sigma \alpha \beta = \frac{3 p_2}{p_0}, \alpha \beta \gamma = - \frac{p_3}{p_0}$$

Führt man diese Werte für die Verhältnisse von p_0, p_2, p_3 in (2) ein ($p_1 = 0$), dann kann man λ und μ so wählen, dass das erste Glied von (2) durch $(s - \alpha t)^2$, resp. $(s - \beta t)^2$ oder $(s - \gamma t)^2$, teilbar ist; der Quotient

ist dann nur durch eine multiplikative Konstante von φ resp. ψ , χ verschieden. Führt man diese Divisionen aus, dann findet man:

Die Formen φ , ψ und χ sind projektiv äquivalent mit den folgenden:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= c_1 \{s^2 + 2\alpha st + (\alpha^2 + 2\beta\gamma)t^2\} \\ \psi &= c_2 \{s^2 + 2\beta st + (\beta^2 + 2\gamma\alpha)t^2\} \\ \chi &= c_3 \{s^2 + 2\gamma st + (\gamma^2 + 2\alpha\beta)t^2\} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wo

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Hier sind c_1, c_2, c_3 Konstanten. Die zu φ, ψ, χ gehörenden Linearformen sind schon gefunden; sie sind $s - \alpha t, s - \beta t, s - \gamma t$.

Der Punkt T hat die Koordinaten $(1,0)$; es sei S der Punkt $(0,1)$. Dann können wir noch die folgende Bemerkung machen, die uns weiterhin von Nutzen sein wird; bestimmt man den Pol P von T in Bezug auf die Nullpunkte von φ und dann den Pol von P in Bezug auf das Punktepaar (T, S) , dann ist der letztgenannte Punkt der Nullpunkt der zu φ gehörenden Linearform $s - \alpha t$.

§ 4. Es sei nun gefragt, diese Formen auch dadurch projektiv zu charakterisieren, dass die Beziehungen zwischen ihren Invarianten angegeben werden.

Es ist vielleicht wieder am einfachsten dabei von ihren JACOBISCHEN Kovarianten φ', ψ' und χ' auszugehen, wobei φ' die JACOBISCHE Kovariante von ψ und χ ist:

$$\varphi' = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial s} & \frac{\partial \chi}{\partial s} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} & \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

Abgesehen von multiplikativen, von Null verschiedenen, Konstanten, (man hat durch $\beta - \gamma, \gamma - \alpha, \alpha - \beta$ zu dividieren) findet man, wenn

$$p = \beta - \gamma, q = \gamma - \alpha, r = \alpha - \beta$$

gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} \varphi' &= s^2 + (q - r)st - qr t^2 \\ \psi' &= s^2 + (r - p)st - rp t^2 \\ \chi' &= s^2 + (p - q)st - pq t^2 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und

$$p + q + r = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

(p, q , und r sind von Null verschieden).

Die Invarianten von φ' , ψ' und χ' werden wieder durch

$$\begin{vmatrix} D'_{11} & D'_{12} & D'_{13} \\ D'_{21} & D'_{22} & D'_{23} \\ D'_{31} & D'_{32} & D'_{33} \end{vmatrix}$$

dargestellt, wobei ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \varrho^2 D'_{11} &= 4qr + (q-r)^2 = p^2; \quad \sigma^2 D'_{22} = q^2, \quad \tau^2 D'_{33} = r^2 \\ \varrho\sigma D'_{12} &= 2rp + 2rq + (q-r)(r-p) = -(4r^2 + pq); \quad \varrho\tau D'_{13} = \\ &= -(4q^2 + pr); \quad \sigma\tau D'_{23} = -(4p^2 + qr) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Es müssen jetzt $\varrho, \sigma, \tau, p, q, r$ aus diesen Gleichungen und (8) eliminiert werden.

Es ist

$$\frac{D'_{23} + \sqrt{D'_{22} D'_{33}}}{4\sqrt{D'_{22} D'_{33}}} = -\frac{p^2}{qr},$$

wenn man

$$\sqrt{D'_{22} D'_{33}} = qr$$

nimmt. Man findet dann sogleich

$$\left. \begin{aligned} (D'_{23} + \sqrt{D'_{22} D'_{33}})(D'_{31} + \sqrt{D'_{33} D'_{11}})(D'_{12} + \sqrt{D'_{11} D'_{22}}) + \\ + 64 D'_{11} D'_{22} D'_{33} = 0 \end{aligned} \right\}; \quad (10)$$

wegen (8) hat man auch

$$D'_{23}\sqrt{D'_{11}} + D'_{31}\sqrt{D'_{22}} + D'_{12}\sqrt{D'_{33}} + 15\sqrt{D'_{11} D'_{22} D'_{33}} = 0, \quad (11)$$

wenn man nur

$$\sqrt{D'_{11}} = p, \sqrt{D'_{22}} = q, \sqrt{D'_{33}} = r \text{ und } \sqrt{D'_{11} D'_{22} D'_{33}} = pqr$$

nimmt.

Umgekehrt sind die Bedingungen (10) und (11), wenn die Quadratwurzeln so bestimmt sind, dass

$$\begin{aligned} \sqrt{D_{ii}} \sqrt{D_{kk}} &= \sqrt{D_{ii} D_{kk}}, \\ \sqrt{D_{11}} \sqrt{D_{22}} \sqrt{D_{33}} &= \sqrt{D_{11} D_{22} D_{33}} \end{aligned}$$

¹⁾ Sind die Formen $a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2$ und $b_0 x^2 + 2b_1 xy + b_2 y^2$ gegeben, dann nehme ich $D_{11} = a_0 a_2 - a_1^2$, $D_{12} = \frac{1}{2}(a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0)$; die Formen φ' , ψ' und χ' sind aber nur bis auf einer multiplikativen Konstante bestimmt.

hinreichend, damit die Gleichungen (9) und (8) eine Lösung nach $\varrho, \sigma, \tau, p, q, r$ haben, wobei p, q, r , von Null verschieden sind; angenommen wird, dass keine der Invarianten D'_{ii} gleich Null ist.

Kehren wir nun zu den Formen φ, ψ und χ zurück. Ihre Invarianten werden durch

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix}$$

dargestellt. Es ist bekannt, dass die algebraischen Unterdeterminanten d_{ik} von D_{ik} proportional sind mit den Invarianten D'_{ik} .

Wir kommen also zu dem Resultat:

Wenn die Formen φ, ψ und χ der in § 1 gestellten Bedingung genügen, dann bestehen zwischen ihren Invarianten die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} (d_{23} + \sqrt{d_{22} d_{33}})(d_{31} + \sqrt{d_{33} d_{11}})(d_{12} + \sqrt{d_{11} d_{22}}) + 64 d_{11} d_{22} d_{33} &= 0 \\ d_{23} \sqrt{d_{11}} + d_{31} \sqrt{d_{22}} + d_{12} \sqrt{d_{33}} + 15 \sqrt{d_{11} d_{22} d_{33}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Diese Beziehungen sind auch hinreichend, wenn man die Quadratwurzeln so bestimmt hat, dass

$$\sqrt{d_{ii}} \sqrt{d_{kk}} = \sqrt{d_{ii} d_{kk}}; \sqrt{d_{11}} \sqrt{d_{22}} \sqrt{d_{33}} = \sqrt{d_{11} d_{22} d_{33}}.$$

Die Nebenbedingung $D'_{ii} \neq 0$ gibt hier $d_{ii} \neq 0$, d.h. zwei Formen φ, ψ und χ haben keinen Nullpunkt gemein; das ist aber schon in § 1 vorausgesetzt.

§ 5. Man kann ebenso wie in der ersten Mitteilung diesen Bedingungen eine mehr geometrische Form geben. Nennen wir die Nullpunkte von φ', ψ', χ' resp. $(A'_1, A'_2), (B'_1, B'_2), (C'_1, C'_2)$, dann kann man diese durch ihre Koordinaten darstellen:

$$A'_1(-q, 1), A'_2(r, 1), B'_1(-r, 1), B'_2(p, 1), C'_1(-p, 1), C'_2(q, 1).$$

Man sieht dann sogleich, dass die Paare

$$(B'_2, C'_1), (C'_2, A'_1), (A'_2, B'_1)$$

einer und derselben quadratischen Involution

$$v s^2 + \varrho t^2 = 0$$

angehören; die Doppelpunkte dieser Involution sind $T(1, 0)$ und $S(0, 1)$.

Ausserdem ist

$$p + q + r = 0,$$

d. h. S ist der lineare Pol von T , sowohl in Bezug auf das Tripel (A_2, B_2, C_2) , als in Bezug auf das Tripel (A_1, B_1, C_1) .

Diese Eigenschaften bleiben bei projektiver Transformation bestehen.

Man könnte, wie in der vorigen Mitteilung, hiervon ausgehend, die Nullpunkte von φ', ψ', χ' und von φ, ψ, χ auf einem Kegelschnitte konstruieren.

§ 6. Es seien nun φ, ψ und χ wieder in der Form (1) gegeben; gefragt wird die Form τ , die durch $(t_2 x - t_1 y)^4$ dargestellt werden kann, und die Linearformen

$$\varphi^+ = \alpha_2^+ x - \alpha_1^+ y, \psi^+ = \beta_2^+ x - \beta_1^+ y, \chi = \gamma_2^+ x - \gamma_1^+ y$$

so zu bestimmen, dass

$$\varphi \varphi^{+2}, \psi \psi^{+2}, \chi \chi^{+2}$$

in einer biquadratischen Involution vorhanden sind. Zur Beantwortung dieser Frage wähle ich wieder ein Beispiel.

Es seien gegeben:

$$\varphi = x^2 - 12 y^2, \psi = x^2 + 2 xy - 5 y^2, \chi = x^2 - 8 xy + 20 y^2.$$

Man findet

$$d_{11} = -\frac{625}{4}, d_{22} = -64, d_{33} = -\frac{1}{4}, \\ d_{23} = 104, d_{31} = -\frac{295}{4} d_{12} = 80.$$

Wenn man

$$\sqrt{d_{11}} = \frac{25}{2} i, \sqrt{d_{22}} = 8 i, \sqrt{d_{33}} = \frac{1}{2} i$$

nimmt, also

$$\sqrt{d_{11}} \sqrt{d_{22}} = -100 \text{ u. s. w.,}$$

dann sind die Bedingungen (12) erfüllt.

Um nun die gefragten Formen φ^+, ψ^+ und χ^+ zu finden, bilden wir die JACOBischen Kovarianten; sie sind, abgesehen von multiplikativen Konstanten,

$$\varphi' = x^2 - 5 xy, \psi' = x^2 - 8 xy + 12 y^2, \chi' = x^2 + 7 xy + 12 y^2$$

mit den Nullpunkten

$$A'_1 (5, 1), A'_2 (0, 1), B'_1 (2, 1), B'_2 (6, 1), C'_1 (-4, 1), C'_2 (-3, 1).$$

Bildet man die Paare

$$(B'_2, C'_1), (C'_2, A'_1), (A'_2, B'_1),$$

dann kommen diese vor in der quadratischen Involution

$$v(x-y)^2 + qy^2 = 0$$

mit den Doppelpunkten $(1, 1)$ und $(1, 0)$. Von diesen beiden Punkten ist der erstgenannte der lineare Pol des zweiten in Bezug auf das Tripel (A'_2, B'_2, C'_2) , dargestellt durch

$$x^3 - 3x^2y - 18xy^2 = 0.$$

Wir nennen diese Punkte $T(1, 0)$ und $S(1, 1)$; T ist dann der Nullpunkt der gefragten Form τ (§ 5); also

$$\tau = y^4.$$

Um dann die Form φ^+ zu bestimmen, brauchen wir nur (§ 2, Schluss) den Pol P von T in Bezug auf die Nullpunkte von φ und dann wieder den Pol von P in Bezug auf das Punktepaar (T, S) zu berechnen; der letztgefundene Punkt ist dann der Nullpunkt von φ^+ . Ebenso werden ψ^+ und χ^+ bestimmt; man findet:

$$\varphi^+ = x - 2y, \psi^+ = x - 3y, \chi^+ = x + 2y, \tau = y^4$$

(von multiplikativen Konstanten ist hierbei abgesehen).

Es gehören also, wie man leicht bestätigt

$$(x^2 - 12y^2)(x - 2y)^2, (x^2 + 2xy - 5y^2)(x - 3y)^2, (x^2 - 8xy + 20y^2)(x + 2y)^2, y^4$$

einer und derselben biquadratischen Involution an.

§ 7. Die Anwendung zur Reduktion von ABELschen Integralen auf elliptische ist der folgende ¹⁾.

Es liege ein Integral

$$I = \int \frac{l^2 dx}{\sqrt{\varphi \psi \chi}}$$

vor; l sei eine Linearform; φ, ψ, χ seien quadratische Formen, die der öfters genannten Bedingung genügen, d. h. es gibt Linearformen $\varphi^+, \psi^+, \chi^+$, sodass $\varphi\varphi^+, \psi\psi^+, \chi\chi^+$ mit l^4 (bis jetzt τ genannt) in einer biquadratischen Involution i_4 vorkommen. Ist also R ein Element dieser Involution, dann giebt es Konstanten a, b, c , sodass

$$\varphi\varphi^+ = R - al^4, \psi\psi^+ = R - bl^4, \chi\chi^+ = R - cl^4.$$

Man schreibt

$$\frac{R}{l^4} = z; dx = \frac{l^5 dz}{l \frac{dR}{dx} - 4R \frac{dl}{dx}}.$$

¹⁾ Siehe KLUYVER I. c.

Wenn man sich aber die Formen R und l homogen denkt — durch Hinzufügung von geeigneten Potenzen y^v ($v = 1, \dots, 4$) — so kann man für den letzten Nenner

$$\frac{y}{4 l^3} \left(\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial l^4}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial l^4}{\partial x} \right)$$

schreiben; dieser Nenner hat also die Doppelemente von i_4 (den Nullpunkt von l nicht mitgerechnet) als Nullpunkte, und ist vom Produkte $\varphi^+ \psi^+ \chi^+$ nur durch einen konstanten Faktor verschieden; also

$$dx = c \frac{l^5}{\varphi^+ \psi^+ \chi^+} dz.$$

So findet man

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{l}{\sqrt{\varphi \psi \chi}} dx = \int \frac{l \varphi^+ \psi^+ \chi^+}{\sqrt{(R - a l^4)(R - b l^4)(R - c l^4)}} dx = \\ &= c \int \frac{l^6}{\sqrt{(R - a l^4)(R - b l^4)(R - c l^4)}} dz = c \int \frac{dz}{\sqrt{(z - a)(z - b)(z - c)}}; \end{aligned}$$

I ist reduziert auf ein elliptisches Integral erster Gattung.
Am Beispiel in § 6 anschliessend:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 12)(x^2 + 2x - 5)(x^2 - 8x + 20)}}.$$

Man kann

$$R = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 48x$$

nehmen und findet dann

$$a = 48, b = 45, c = -80;$$

man schreibt

$$z = R = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 48x$$

und findet dann

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{dz}{\sqrt{(z - 48)(z - 45)(z + 80)}}.$$

Mathematics. — *Ueber das bewegende Achsensystem im affinen Raum; Ableitung der Grundformeln der Flächentheorie.* Von W. VAN DER WOUDE und J. HAANTJES.

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

Bekanntlich gibt die Anwendung eines *bewegenden* Achsensystems für die Behandlung vieler Fragen aus der Differentialgeometrie eine bedeutende Vereinfachung.¹⁾

In vorliegender Arbeit wird ein Achsensystem betrachtet, dessen Bewegung von zwei Parametern abhängt. Dadurch dass man den Ursprung dieses Systems eine Fläche im dreidimensionalen Raum beschreiben lässt, werden die Grundformeln (Relationen zwischen den beiden Fundamentaltensoren) abgeleitet, zugleich mit den Formeln, die von grosser Wichtigkeit sind für die Anwendungen auf die, mit der oben genannten Fläche invariant zusammenhängenden, Flächen und Strahlensysteme.²⁾

Man wird dabei zu einer von der üblichen verschiedenen Uebertragung geführt³⁾, die man kurz in der folgenden Weise deuten kann: Ein in der Tangentialebene gelegener Raumvektor durch O wird bei einer infinitesimalen Verrückung des Achsensystems parallel verschoben, und nachher wieder in die Richtung der Affinnormalen auf die Tangentialebene projiziert.

1. Es seien $\bar{O} \bar{X}^1 \bar{X}^2 \bar{X}^3$ und $O X^1 X^2 X^3$ zwei Achsenkreuze im affinen Raum, die wir bzw. das feste und das bewegende nennen. Bei der Transformation

$$x^l = \sum_{k=1}^3 \alpha_k^l x^k + a^l, \quad \alpha \equiv |\alpha_k^l| = 1$$

und umgekehrt

$$x^l = \sum_{k=1}^3 A_k^l (\bar{x}^k - a^k).$$

¹⁾ Für Anwendungen auf andere Transformationsgruppen als die orthogonale:

G. PICK. *Natürliche Geometrie ebener Transformationsgruppen*, Wiener Berichte, 1906;
CÉSARO-KOWALEWSKI: *Vorlesungen über natürliche Geometrie*, zweite Auflage, Teubner 1926;

G. KOWALEWSKI: *Allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen*, Göschensche Lehrbücherei, Gruppe I, Bd. 19.

²⁾ Für einen Sonderfall verweisen wir auf:

W. VAN DER WOUDE: *Ein Problem der Affingeometrie*, Math. Zeitschrift, Bd. 26, 1927, pag. 186.

³⁾ W. BLASCHKE: *Vorlesungen über Differentialgeometrie II*, p. 196. Der Verfasser benützt diese Uebertragungskomponenten um die Integrierbarkeitsbedingungen in durchsichtiger Gestalt zu erhalten.

wo A_k^l der Minor ist von a_l^k , sind a_l^k Funktionen zweier Parameter u^1 und u^2 .

Wir werden die übliche Bezeichnung folgen, dass nach einem Index, der zweimal auftritt (und zwar einmal oben und einmal unten), stillschweigend summiert werden soll. Wir schreiben also

$$\bar{x}^l = a_k^l x^k + a^l$$

Die Indizes k, l, m, n, r, \dots können immer 1, 2 und 3 sein, λ, μ, ν, \dots nur 1 und 2.

Sind \bar{x}^l und x^l die Koordinaten eines Punktes, der in bezug auf keines der beiden Achsenkreuze in Ruhe zu sein braucht, so ist

$$d\bar{x}^l = \left(\frac{\partial a^l}{\partial u^\mu} + \frac{\partial a_k^l}{\partial u^\mu} x^k + a_k^l \frac{\partial x^k}{\partial u^\mu} \right) du^\mu. \quad (1)$$

Wir werden die Komponenten dieses infinitesimalen Vektors (Vektor der „absoluten“ Verrückung) in bezug auf die beweglichen Achsen durch δx^l darstellen. Dann ist

$$\delta x^l = A_r^l d\bar{x}^r$$

und wegen (1)

$$\delta x^l = \left(\xi_\mu^l + A_{k\mu}^l x^k + \frac{\partial x^l}{\partial u^\mu} \right) du^\mu, \quad (2)$$

wo

$$\xi_\mu^l = A_r^l \frac{\partial a^r}{\partial u^\mu}; \quad (3a)$$

$$A_{k\mu}^l = A_r^l \frac{\partial a_k^r}{\partial u^\mu}; \quad (3b)$$

Ist b ein von den Parametern u^μ abhängiger Raumvektor mit den Komponenten b^l auf dem festen Achsenkreuz, so kann man die beiden Vektoren, die bezüglich dieser Achsen die Komponenten $\frac{\partial b^l}{\partial u^\mu}$ haben, die Ableitungen von b nennen. Sind b^l die Komponenten des Vektors b auf die beweglichen Achsen, so ersieht man leicht, wie die Komponenten $\frac{\delta b^l}{\partial u^\mu}$ dieser abgeleiteten Vektoren in bezug auf diese Achsen mit $\frac{\partial b^l}{\partial u^\mu}$ zusammenhängen. Es ist nämlich

$$\frac{\delta b^l}{\partial u^\mu} = \frac{\partial b^l}{\partial u^\mu} + A_{k\mu}^l b^k. \quad (4)$$

Zu diesem ist Folgendes zu bemerken: die drei Funktionen $A_{k\mu}^l$, wo k und μ konstant sind, l hingegen die Werte 1, 2 und 3 hat, sind auch Komponenten eines Vektors, und zwar der Ableitungen des Einheitsvektors in der Richtung OX^k nach u^μ .

Daher setzen wir

$$\frac{\partial A_{k\mu}^l}{\partial u^\nu} = \frac{\partial A_{k\mu}^l}{\partial u^\nu} + A_{r\nu}^l A_{k\mu}^r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

2. Die Funktionen $A_{k\nu}^l$ genügen mehreren Ableitungsgleichungen, aber es gibt auch zwei Beziehungen, in denen keine Ableitung auftritt.

Aus

$$\alpha = |a_k^l| = 1$$

findet man, indem man nach u'' differenziert, wegen (3) sofort die beiden Formeln ohne Ableitung, nämlich

$$A_{l\mu}^l = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Weiter ist wegen der Definitionen (3)

$$\frac{\partial a_k^l}{\partial u_\mu} = a_r^l A_{k\mu}^r$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a_k^l}{\partial u^\mu \partial u^\nu} &= a_r^l \frac{\partial A_{k\mu}^r}{\partial u^\nu} + A_{k\mu}^r \frac{\partial a_r^l}{\partial u^\nu} \\ &= a_r^l \frac{\partial A_{k\mu}^r}{\partial u^\nu} + a_m^l A_{r\nu}^m A_{k\mu}^r \end{aligned}$$

Durch Vertauschung von m und r kann man dafür auch schreiben

$$\frac{\partial^2 a_k^l}{\partial u^\mu \partial u^\nu} = a_r^l \left\{ \frac{\partial A_{k\mu}^r}{\partial u^\nu} + A_{m\nu}^r A_{k\mu}^m \right\}$$

oder nach (5)

$$\frac{\partial^2 a_k^l}{\partial u^\mu \partial u^\nu} = a_r^l \frac{\partial A_{k\mu}^r}{\partial u^\nu}.$$

Im linken Glied darf man μ und ν vertauschen. Somit hat man wegen $\alpha \neq 0$

$$\frac{\partial A_{k\mu}^l}{\partial u^\nu} = \frac{\partial A_{k\nu}^l}{\partial u^\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

In gleicher Weise zeigt man

$$\frac{\partial \xi_{\nu}^l}{\partial u^{\nu}} = \frac{\partial \xi_{\nu}^l}{\partial u^{\mu}} \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \quad (8)$$

3. Es fragt sich, ob es immer eine Bewegung im affinen Raum gibt mit gegebenen Funktionen $A_{k\mu}^l$ und ξ_{μ}^l , wenn diese den Bedingungen (6), (7) und (8) genügen, d.h.: kann man aus (3a) und (3b) $a(u^1, u^2)$ und $a(u^1, u^2)$ so auflösen, dass zugleich $a = 1$ wird?

Betrachtet man die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial a_k^l}{\partial u^{\mu}} = a_r^l A_{k\mu}^r \quad (l = 1, 2, 3; \mu = 1, 2),$$

wo k konstant ist (es sind also sechs Gleichungen), so kann man Lösungen a_k^l finden, weil die Funktionen $A_{k\mu}^r$ den Bedingungen (7) genügen, welche gerade die Integrabilitätsbedingungen dieser Differentialgleichungen sind. Wir wählen nun drei Systeme linear unabhängiger Lösungen

$$a_1^1, a_1^2, a_1^3,$$

$$a_2^1, a_2^2, a_2^3,$$

$$a_3^1, a_3^2, a_3^3,$$

in denen die willkürlich zu nehmenden Konstanten so bestimmt werden sollen, dass die Determinante dieser neun Funktionen a_k^l für $u^1 = u_0^1$ und $u^2 = u_0^2$ den Anfangswert $+1$ hat; also $a(u_0^1, u_0^2) = 1$. Die Gleichungen (6) sagen aber aus, dass $a(u^1)$ konstant ist; deshalb haben wir

$$a(u^1, u^2) = 1.$$

Im ähnlicher Weise zeigt sich, dass die Funktionen $a(u^1, u^2)$ bestimmt werden können. Die Funktionen $A_{k\mu}^l$ und ξ_{μ}^k , welche den Bedingungen (6), (7) und (8) genügen, bestimmen also gewiss eine Bewegung im affinen Raum.

4. Der Ursprung O des bewegenden Koordinatensystems beschreibt eine Fläche

$$\bar{x}^k = a^k(u^1, u^2).$$

Bisher haben wir noch keine Annahme gemacht über die Lage des beweglichen Achsenkreuzes hinsichtlich der oben genannten Fläche. Jetzt mögen die Achsen OX^1 und OX^2 bzw. zusammenfallen mit den Tangenten der u^1 -Linien ($u^2 = \text{konstant}$) und u^2 -Linien.

Somit können wir setzen ¹⁾

$$a_{\mu}^l = \frac{\partial a^l}{\partial u^{\mu}} \quad (9)$$

wo, wie immer, $l = 1, 2, 3$; $\mu = 1, 2$ ist.

Aus (3a) folgt dann

$$\xi_{\nu}^l \leq 1 \quad (l = \mu) \\ \xi_{\nu}^l \leq 0 \quad (l \neq \mu) \quad (10)$$

Wegen (9) erhält das System von Ableitungsgleichungen (8)

$$\frac{\partial \xi_1^l}{\partial u^2} + A_{k2}^l \xi_1^k = \frac{\partial \xi_2^l}{\partial u^1} + A_{k1}^l \xi_2^k$$

jetzt die folgende Gestalt :

$$A_{12}^l = A_{21}^l \quad (11)$$

Setzen wir nun $A_{k\mu}^l$ für $\frac{\partial A_{k\mu}^l}{\partial u^{\nu}}$ (5), so können wir die Bedingungen (7) und (8) zusammenfassen, indem wir sagen :

Für die unteren Indizes von $A_{k\mu}^l$ und $A_{k\mu}^l$ gilt, dass die 1 und 2 vertauschbar sind.

Zum Schluss werden wir $O X^3$ eine, von den Parameterlinien unabhängige, invariante Richtung geben. Dafür bemerken wir dass wegen (3) und (9) die Funktionen A_{μ}^3 ($\mu, \nu = 1, 2$) genau die aus der Flächentheorie bekannten Funktionen L , M und N sind. Wenn man A_{μ}^3 dividiert durch $|\Delta|^{1/4}$ ($|\Delta| = |A_{11}^3 A_{22}^3 - (A_{12}^3)^2|$), so bekommt man den symmetrischen Tensor $g_{\mu\nu}$, aus dem die quadratische Grundform der affinen Differentialgeometrie entsteht. Auf Flächen, für die $\Delta = 0$ — parabolisch gekrümmte Flächen — verzichten wir. Mittels dieses Tensors ist es ein leichtes, zu jedem Flächenpunkt einen mit der Fläche invariant verbundenen Raumvektor, die Affinnormale genannt, anzugeben. Die Komponenten dieses Vektors b^l sind ²⁾

$$b^l = \frac{|\Delta|^{1/4}}{2|\Delta|^{1/2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u^1} \frac{A_{12}^3 \xi_2^l - A_{22}^3 \xi_1^l}{\Delta^{1/2}} + \frac{\partial}{\partial u^2} \frac{A_{12}^3 \xi_1^l - A_{11}^3 \xi_2^l}{\Delta^{1/2}} \right\} \quad (12)$$

¹⁾ Man darf natürlich auch setzen $\alpha_{\mu}^l = p(u) \frac{\partial a^l}{\partial u^{\mu}}$. Für Anwendungen auf die Differentialgeometrie der Flächen ist es bisweilen zweckmässiger zu nehmen :

$$\alpha_{\mu}^l = \frac{|\Delta|^{1/8}}{\sqrt{A_{\mu\mu}^3}} \frac{\partial a^l}{\partial u^{\mu}}$$

Die Funktionen $A_{k\mu}^l$ sind dann geometrische Grössen, die nur von den Parameterlinien abhängig sind und sich nicht ändern durch eine Parametertransformation $\bar{u}^{\lambda} = f_{\lambda}^{\mu}(u)$. Für unsern Zweck ist dieses Verfahren nicht sehr geeignet.

²⁾ BIANCHI—LUKAT: Vorlesungen über Differentialgeometrie, pag. 46, zweite Auflage, Teubner 1910.

W. BLASCHKE: Vorlesungen über Differentialgeometrie II, pag. 105, Springer, 1923

Die Achse $O X^3$ falle nun mit der Affinnormale zusammen. Die dafür notwendige und hinreichende Bedingung ist

$$b^1 = b^2 = 0$$

Die Grössen $A'_{k\mu}$ genügen also noch den zwei Gleichungen, die man bekommt, wenn man in (12) die Ausdrücke für b^1 und b^2 gleich null setzt. Diese Bedingungen kann man vereinfachen. Der Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial u^\mu} \frac{A_{k\nu}^3 \xi_\rho^l}{\Delta^{1/2}}$$

bedeutet nämlich wegen (4)

$$\frac{\partial}{\partial u^\mu} \frac{A_{k\nu}^3 \xi_\rho^l}{\Delta^{1/2}} + \Delta^{-1/2} A_{r\mu}^l A_{k\nu}^3 \xi_\rho^r$$

wo ξ_ρ^l der Gleichung (10) genügt.

Wenn man schliesslich (7) heranzieht und

$$-\frac{\partial}{\partial u^2} A_{12}^3 + \frac{\partial}{\partial u^1} A_{22}^3 \text{ sowie } -\frac{\partial}{\partial u^2} A_{11}^3 + \frac{\partial}{\partial u^1} A_{12}^3$$

ohne Ableitungen durch $A'_{k\mu}$ ausdrückt, so sehen diese Bedingungen wegen (6) folgendermassen aus

$$-A_{\mu 2}^3 \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial \log |\Delta|}{\partial u^1} + A_{31}^3 \right\} + A_{31}^3 \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial \log |\Delta|}{\partial u^2} + A_{32}^3 \right\} = 0.$$

Die Bedingungen, die aussagen, dass die Achse $O X^3$ zusammenfällt mit der Affinnormale nehmen also wegen $\Delta \neq 0$, die folgende einfache Gestalt an:

$$A_{3\mu}^3 = -\frac{1}{4} \frac{\partial \log |\Delta|}{\partial u^\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

5. Wenn wir die gefundenen Ergebnisse noch einmal zusammenfassen, so können wir sagen:

Für die unteren Indizes von $A'_{k\mu}$ und $A'_{k\mu\nu}$ gilt, dass sie vertauschbar sind, wenn sie 1 oder 2 sind, während überdies noch

$$A_{l\mu}^l = 0 \quad ; \quad A_{3\mu}^3 = -\frac{1}{4} \frac{\partial \log |\Delta|}{\partial u^\mu}.$$

Es ist klar, dass aus (13) eine von den übrigen abhängige Beziehung folgt, welche für die Anwendungen manchmal sehr nützlich ist, weil sie keine Ableitungen von $A'_{k\mu}$ enthält. Es ist ja wegen (13) und (7):

$$\frac{\partial A_{3\rho}^3}{\partial u^\sigma} - \frac{\partial A_{3\sigma}^3}{\partial u^\rho} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial A_{3\rho}^3}{\partial u^\sigma} - \frac{\partial A_{3\sigma}^3}{\partial u^\rho} = 0,$$

mithin

$$A_{u\rho}^3 A_{3\sigma}'' - A_{u\sigma}^3 A_{3\rho}'' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Um die geometrische Bedeutung dieser Bedingung ausfindig zu machen, suchen wir die Affinkrümmungslinien. Eine Kurve auf einer Fläche heisst eine Affinkrümmungslinie, wenn die längs der Kurve gezogenen Affinormalen eine Kurve einhüllen.

Wenn der Berührungspunkt M dieser Kurve mit der Normale die Koordinaten $(0, 0, w)$ hat, so gilt für M :

$$\delta x^1 = (1 + A_{31}^1 w) du^1 + A_{32}^1 w du^2 = 0,$$

$$\delta x^2 = A_{31}^2 w du^1 + (1 + A_{32}^2 w) du^2 = 0.$$

Durch Elimination von w erhalten wir die Differentialgleichung der affinen Krümmungslinien:

$$A_{31}^2 (du^1)^2 + (A_{32}^2 - A_{31}^1) du^1 du^2 - A_{32}^1 (du^2)^2 = 0.$$

Sind die Affinkrümmungslinien Parameterlinien, so hat man

$$A_{31}^2 = A_{32}^1 = 0.$$

Wegen (14) ist dann aber

$$A_{12}^3 = 0.$$

Deshalb bilden die Krümmungslinien ein Netz konjugierter Kurven.

6. Dadurch dass wir die Koordinatenachsen festgelegt haben, sind die Formeln zwar vereinfacht, aber die Symmetrie bezüglich der Indizes 1, 2 und 3 ist verloren gegangen. Sie kann aber wieder hergestellt werden, wenn man die Schreibweise ändert. Der Index 3 verschwindet dabei und die Funktionen A_k^i bekommen ganz verschiedene Bedeutungen, je nachdem der Index 3 oben, unten, oder gar nicht auftritt. Wir führen dabei den ersten Fundamentaltensor der von O beschriebenen Fläche, $g_{\mu\nu}$, ein; an die Stelle von $|\Delta|^{1/2}$ tritt dann $|g|^{1/2}$.

Wie wir schon bemerkten, sind die Funktionen A_{μ}^3 proportional mit den Komponenten $g_{\mu\nu}$ des ersten Fundamentaltensors, und sind die Grössen $A_{3\mu}^1$ die Ableitungen von $\log |g|^{1/2}$. Es wird sich weiter zeigen, dass die A_{μ}^{σ} , die Komponenten einer Übertragung der Fläche bilden und der bekannte zweite Fundamentaltensor $A_{\mu\nu}^{\sigma}$ nur um einen konstanten Faktor von dem Tensor $g_{\mu\nu}^{\sigma}$, die invariante Ableitung des ersten Grundtensors, verschieden ist. Für die noch übrigen $A_{3\mu}^{\sigma}$ ergibt sich zum Schluss die Proportionalität mit den Komponenten $B_{\mu\nu}^{\sigma}$ eines aus dem RIEMANNschen Krümmungstensor $R_{\mu\nu}^{\sigma\tau}$ gewonnenen Ten-

sors. Wenn wir $g_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu\rho}$ als gegeben voraussetzen, so sind alle Funktionen $A_{k\mu}^l$ bestimmt; dabei sind die Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} A_{l\mu}^l &= 0 \\ \frac{\partial A_{3\nu}^{\mu}}{\partial u^{\rho}} &= \frac{\partial A_{3\rho}^{\mu}}{\partial u^{\nu}} \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (15)$$

nicht benutzt.

Es zeigt sich, dass diese Gleichungen äquivalent sind mit den Bedingungen, die $g_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu\rho}$ genügen sollen, nämlich die Apolaritätsforderungen und die den Formeln von CODAZZI entsprechenden Formeln.

7. Zu dieser Übertragung werden wir in der folgenden Weise geführt: b ($b^1, b^2, 0$) sei ein Raumvektor in der Tangentialebene in O ; wenn der Vektor mit O so verschoben wird, dass immer

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial b^{\mu}}{\partial u^{\nu}} + A_{\rho\nu}^{\mu} b^{\rho} &= 0 \\ b^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (16)$$

so soll diese Bewegung von b „eine Parallelverschiebung eines kontravarianten Vektors in der Fläche“ heissen. Wir können die infinitesimale Verschiebung des Vektors betrachten als eine parallele Verschiebung in R_3 , zusammen mit einer Projektion in die Richtung der Affinnormale auf die Tangentialebene. Zugleich ergibt sich hieraus, dass diese Erklärung der Parallelverschiebung nicht von der Wahl der Koordinaten abhängt. Ändert man die Parameterlinien, so transformieren sich auch (wegen § 4) die Achsen OX^1 und OX^2 ; die Komponenten b^1 und b^2 und auch du^1 und du^2 werden in gleicher Weise transformiert. Nennen wir b^{μ} einen kontravarianten Vektor, so ist deshalb auch du^{μ} ein kontravarianter Vektor. Damit haben wir also zugleich gezeigt, dass $g_{\mu\nu}$ ein kovarianter Vektor der Valenz zwei (zweiter Stufe) ist.¹⁾

Wir finden nach (16)

$$g_{\mu\nu,\rho} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^{\rho}} - A_{\rho\nu}^{\sigma} g_{\sigma\mu} - A_{\mu\rho}^{\sigma} g_{\sigma\nu} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (17)$$

Weiter ist

$$g_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}^3 |\Delta|^{-1/2} = A_{\mu\nu}^3 |g|^{-1/2}, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (18)$$

wo g die Determinante der $g_{\mu\nu}$ ist; Wenn wir die Formel (5)

$$A_{\mu\nu\rho}^3 = \frac{\partial A_{\mu\nu}^3}{\partial u^{\rho}} + A_{k\rho}^3 A_{\mu\nu}^k$$

¹⁾ Für das Herauf- und Herunterziehen der Indizes gelten die üblichen Regeln. z.B.
 $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\cdot\sigma}^{\cdot\tau}{}_{\cdot\rho} g_{\tau\nu}$

dividieren durch $|\Delta|^{1/4}$, so können wir dafür wegen (13) auch setzen

$$|\Delta|^{-1/4} A_{\mu\nu\rho}^3 = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^\rho} + A_{\mu\nu}^\sigma g_{\sigma\rho} \quad (19)$$

Durch Einsetzen des Wertes von $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^\rho}$ aus (19) in (17), erhält diese Formel die folgende Gestalt:

$$g_{\mu\nu,\rho} = A_{\mu\nu\rho}^3 |\Delta|^{-1/4} - (A_{\mu\nu}^\sigma g_{\sigma\rho} + A_{\nu\rho}^\sigma g_{\sigma\mu} + A_{\mu\rho}^\sigma g_{\sigma\nu}) \quad (20)$$

Erstens zeigt sich hier, dass $g_{\mu\nu,\rho}$ ein symmetrischer Tensor ist; weiterhin setzen wir $g_{\mu\nu,\rho}^1$). Zugleich ergibt sich wegen (17) und (18), dass wenn $g_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu,\rho}$ gegeben sind, man die Übertragungskomponenten $A_{\mu\rho}^\sigma$ und darauf $A_{\mu\nu\rho}^3$ bestimmen kann.

Um die Grössen $A_{\mu\rho}^\sigma$ in $g_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu,\rho}$ auszudrücken setzen wir in (17)

$$A_{\mu\rho}^\sigma = \Gamma_{\mu\rho}^\sigma + A_{\mu\rho}^\sigma,$$

wo $\Gamma_{\mu\rho}^\sigma$ die aus dem ersten Fundamentaltensor gebildeten CHRISTOFFEL-symbole sind. Formel (17) nimmt dann die folgende Gestalt an:

$$g_{\mu\nu,\rho} = -A_{\nu\rho}^\sigma g_{\sigma\mu} - A_{\mu\rho}^\sigma g_{\sigma\nu}.$$

Denn die invariante Ableitung eines Tensors, gebildet mit den zugehörigen CHRISTOFFEL-symbolen verschwindet.

Wir finden also

$$A_{\nu\rho}^\sigma = -\frac{1}{2} g_{\nu\rho}^\sigma$$

und somit

$$A_{\nu\rho}^\sigma = \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \frac{1}{2} g_{\nu\rho}^\sigma$$

Die $A_{\nu\rho}^\sigma$ sind also die Komponenten eines symmetrischen Tensors.

Es lässt sich leicht bestätigen, dass $A_{\mu\nu\rho}$ der bekannte zweite Grundtensor ist.

8. Der Krümmungstensor dieser Übertragung ist definiert durch

$$R_{\mu\rho}^\nu{}^\sigma = \frac{\partial A_{\mu\rho}^\nu}{\partial u^\sigma} - \frac{\partial A_{\mu\sigma}^\nu}{\partial u^\rho} + A_{\tau\sigma}^\nu A_{\mu\rho}^\tau - A_{\tau\rho}^\nu A_{\mu\sigma}^\tau.$$

Bemerken wir, dass wegen (5)

$$0 = \frac{\partial A_{\mu\rho}^\nu}{\partial u^\sigma} - \frac{\partial A_{\mu\sigma}^\nu}{\partial u^\rho} + A_{t\sigma}^\nu A_{\mu\rho}^t - A_{t\rho}^\nu A_{\mu\sigma}^t$$

¹⁾ Also ist $g_{\mu\nu,\rho} = g_{\mu\nu,\sigma} g^{\sigma\rho}$; wenn aber ein Komma als Differenzierungszeichen vorhanden ist, werden keine Indices auf und nieder geschoben. (s. § 9).

so folgt, weil τ gleich 1, 2 und t gleich 1, 2, 3, ist,

$$R_{\mu, \rho \sigma}^{\nu} = (-A_{3\sigma}^{\nu} g_{\mu \rho} + A_{3\rho}^{\nu} g_{\mu \sigma}) |g|^{1/2}.$$

Durch Falung entsteht aus ihm der Tensor

$$D_{\mu \rho} = R_{\mu, \rho \nu}^{\nu} = (-A_{3\nu}^{\nu} g_{\mu \rho} + A_{3\rho}^{\nu} g_{\mu \nu}) |g|^{1/2}.$$

Wenn man in (14) $A_{\mu \nu}^3$ durch $g_{\mu \nu}$ ersetzt, so erkennt man leicht, dass $D_{\mu \rho}$ ein symmetrischer Tensor ist.

Deshalb hat man

$$D_{\mu}^{\sigma} = (-A_{3\nu}^{\sigma} g_{\mu}^{\nu} + A_{3\mu}^{\sigma}) |g|^{1/2}.$$

Um die übliche Schreibweise zu erhalten, führen wir einen neuen Tensor B_{μ}^{σ} ein durch

$$B_{\mu}^{\sigma} = D_{\mu}^{\sigma} - D_{\nu}^{\nu} g_{\mu}^{\sigma}.$$

Daraus folgt

$$A_{3\mu}^{\sigma} = B_{\mu}^{\sigma} |g|^{-1/2}.$$

Wir können nun unsere Resultaten folgendermassen zusammenfassen:

$$A_{\mu \nu}^3 = g_{\mu \nu} |g|^{1/2}; A_{3\mu}^3 = -\frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u^{\mu}}; A_{3\mu}^{\sigma} = B_{\mu}^{\sigma} |g|^{-1/2}; \dots \quad (21)$$

die Funktionen $A_{\mu \nu}^{\sigma}$ sind die Übertragungskomponenten, die durch $g_{\mu \nu}$ und $g_{\mu \nu \rho}$ ausgedrückt folgende Gestalt haben:

$$A_{\mu \nu}^{\sigma} = \Gamma_{\mu \nu}^{\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu \nu}^{\sigma}.$$

9. Wir werden noch untersuchen, welche Form die Bedingungen (15) annehmen.

Was dem ersten Gleichungssystem betrifft, zeigt man ohne Mühe, dass man für

$$A_{i\mu}^i = 0$$

schreiben kann

$$g^{\mu \nu} g_{\mu \nu \rho} = 0$$

und das sind die Apolaritätsbedingungen zwischen $g_{\mu \nu}$ und $g_{\mu \nu \rho}$.

Für das zweite System aus (15) muss zuerst eine Bemerkung gemacht werden über das Herauf- und Herunterziehen der Indizes und die invariante Ableitung. Wir beschränken uns dafür auf den für uns wichtigsten Fall.

$P_{\mu \nu}$ oder P_{ν}^{σ} seien die Komponenten eines symmetrischen Tensors. Es ist also

$$P_{\mu \nu} = P_{\nu}^{\sigma} g_{\mu \sigma}.$$

Wir können aus diesem Tensor die folgenden ableiten

$$P_{\mu\nu,\rho} = \frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial u^\rho} - A_{\mu\rho}^\tau P_{\tau\nu} - A_{\nu\rho}^\tau P_{\tau\mu}.$$

$$P_{\nu,\rho}^\sigma = \frac{\partial P_\nu^\sigma}{\partial u^\rho} - A_{\nu\rho}^\tau P_\tau^\sigma + A_{\rho}^\sigma P_\nu^\tau.$$

Bei dieser Übertragung ist also $g_{\mu\tau} P_{\nu,\rho}^\sigma$ nicht gleich $P_{\mu\nu,\rho}^\sigma$. Es ist nämlich

$$g_{\mu\tau} P_{\nu,\rho}^\sigma = \frac{\partial P_{\mu\nu}^\sigma}{\partial u^\rho} - P_\nu^\sigma \frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial u^\rho} - A_{\tau\rho}^\sigma P_\nu^\tau g_{\mu\sigma} + A_{\nu\rho}^\tau P_{\mu\tau}^\sigma.$$

Bemerken wir weiter, dass

$$A_{\mu\nu}^\tau = \Gamma_{\mu\nu}^\tau - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^\tau$$

ist und die, mittels der Grössen $\Gamma_{\mu\nu}^\tau$ gebildeten, invarianten Ableitungen des Tensors $g_{\mu\nu}$ verschwinden, so ergibt sich:

$$P_{\mu\nu,\rho} - g_{\mu\sigma} P_{\nu,\rho}^\sigma = P_\nu^\sigma g_{\mu\rho,\sigma}.$$

Betrachten wir jetzt das zweite Gleichungssystem aus (15)

$$\frac{\partial A_{3\nu}^\mu}{\partial u^\rho} = \frac{\partial A_{3\rho}^\mu}{\partial u^\nu},$$

oder ausführlicher

$$\frac{\partial A_{3\nu}^\mu}{\partial u^\rho} + A_{k\rho}^\mu A_{3\nu}^k = \frac{\partial A_{3\rho}^\mu}{\partial u^\nu} + A_{k\nu}^\mu A_{3\rho}^k.$$

Nach (21) können wir hierfür auch setzen

$$B_{\nu,\rho}^\mu = B_{\rho,\nu}^\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Das zweite System (15) sagt also aus, dass der abgeleitete Tensor von B_ν^μ symmetrisch ist.

Dem Ergebnis (22) können wir noch eine andere Form geben. Aus dem Vorhergehenden folgt

$$B_{\sigma,\tau}^\tau = B_{\tau,\sigma}^\tau.$$

Setzt man nun

$$B_\tau^\tau = -2H,$$

so kann man für (22) schreiben

$$\frac{\partial H}{\partial u^\sigma} = -\frac{1}{2} B_{\tau,\tau}^\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

und diese letzte Form entspricht Gleichung (155) aus BLASCHKE; Vorlesungen über Differentialgeometrie II, pag. 158.

Anatomy. — *The Forebrain arteries in Plagiostomes, Reptiles, Birds and Monotremes.* By C. U. ARIËNS KAPPERS.

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

It is generally known that the distribution of the forebrain arteries in man is such that the medial side of the hemispheres is vascularised by the arteriae cerebrales anterior and posterior, which from there for a comparative small distance turn over on the convexity.

The convexity itself is supplied by the arteria cerebri media chiefly, which, though sending also branches to the lateral orbital surface of the brain and to the rhinencephalon posterior (lob. piriformis), is the neopallial artery par excellence. The distribution of these vessels in man (DURET, BEEVOR, SHELLSHEAR, K. H. BOUMAN and LEY), and recently also in Anthropoids (SHELLSHEAR, HINDZE, l.c. infra) is well known.

This cannot be said of the of the phylogenetic development of the art. cer. media and its relation with both other arteries with lower vertebrates, although here also excellent work has been done, specially by HOFMANN (l.c. infra). In the following pages I shall give a short survey of my researches on Plagiostomes, Reptiles, Birds and Monotremes and discuss some points of general interest in the relation of these arteries amongst each other and in regard to the territories they supply.

In Plagiostomes the carotis cerebialis turns backward in an obtuse, nearly right curve along the sidewall of the tweenbrain.

This caudal branch (the communicans posterior of higher vertebrates) is very long and passes backward usually at the outside of the III root (*Acanthias*, *Raja clavata*, HOFMANN), not at the inner side of it, as is the case in mammals and in man.

There are, however, exceptions. So in my specimen of *Laemargus borealis* (see figure) the left carotis caudalis passes mesially to the emergence of the III root, the right one laterally to this root. In a *Rhina squatina* exactly the opposite occurred. It is, however, striking that in both cases the stronger branch was running mesially to the root i.e. the stronger branch took the course characteristic of higher development. Backwards under the midbrain-oblongata border the carotis caudalis joins the caudal carotis branch of the other side thus forming an arteria basilaris, which anastomoses with the two anterior branches of the first spinal artery.

At this place a small branch of each anterior spinal artery runs backwards again and forms an impair tractus arteriosus spinalis anterior in the

ventral midline. As in other animals, a *circulus arteriosus spinalis primus* (HOFMANN¹) may be thus established.

The way in which the frontal branches of the *carotis cerebialis* are distributed in *Laemargus* and *Rhina* is such, that already before the curve the art. *ophthalmica* (O) arises. In the curve itself the *arteriae cerebri* arise, first of all the *arteria*, named *arteria bulbi olfactorii lateralis* by HOFMANN. This artery runs in a stretched course along the lateral brainwall to the olfactory stalk, which it supplies till the *bulbus olfactorius*. During this course it gives off ventrally and, principally, dorsally small branches to the lateral mantle wall, some of which turn mesially along the olfactory stalk for a short distance on the dorsal surface of the brain. This *arteria olfacto-bulbaris lateralis* to my opinion is the primitive homologon of the art. *cerebri media*. Medially from it the art. *cerebri anterior* arises, which in *Rhina* has no transverse anastomosis (*art. communicans anterior*) with the analogous artery of the other side.

In *Laemargus borealis* a thin *communicans anterior* is present.

The anterior artery is described by STERZI²) as art. *medialis*.

In *Laemargus*, *Rhina* and *Raja batis* the artt. *anter.* of both sides join at the frontpole of the brain, and turning upwards continue their course on the dorsal forebrain surface, in *Laemargus* for a short distance only.

With my *Rhina squatina* and with *Raja batis*³) this impair artery extends in the midline of the dorsal hemispheres till the posterior border of the pallial area and to the plexus *chorioideus* of the forebrain the parapsysial sac of these animals.

This difference corresponds with the fact that in *Rhina* and in *Rays* a shifting upwards and backwards of the, in *Laemargus* more frontal area took place, which is also reflected in the more compressed form of the plexus *chorioideus anterior* (dotted area in the figure) and the position of the *commissura anterior*, which in these animals for the greater part lies dorsally and therefore by some authors was erroneously considered as a *corpus callosum*.

From the beginning of the caudal branch of the *carotis* (*communicans posterior* of mammalian anatomy), another bloodvessel arises which in *Rhina squatina* chiefly provides the plexus *chorioideus* of the third ventricle and the plexus *chorioidei anteriores*. This artery deserves the name art. *chorioidea anterior*⁴). Since, however, some of its branches bifurcate in the

¹) M. HOFMANN. Zur vergleichenden Anatomie der Gehirn- und Rückenmarksarterien der Vertebraten. Zeitschr. f. Morphologie und Anthropologie. Bnd. 2, 1900, p. 247.

²) STERZI. Il sistema nervoso centrale dei vertebrati, Vol. 2, Pesci; Libro 1 Selaci, Parte 1. Anatomia, Draghi, Padova. 1919.

³) With the two specimens of *Raja clavata* examined by him HOFMANN did not see this dorsal continuation of the art. *anterior cerebri*. I suppose, however, that it occurs also here.

⁴) More caudally from the posterior *carotis* the artt. *mesencephali* and *cerebellaris superior* arise, from the *basilaris* the artt. *cerebelli inferior anterior* and *posterior*, which I shall not describe here.

hind wall of the brain, the arteria cerebri posterior is also included in this artery. With the more primitive *Laemargus borealis* the dorsal mantle branches of the art. posterior cerebri are distinctly larger and more numerous, the larger part of the dorsal mantle being vascularised by it. Also this difference between *Laemargus* and the *Rhinidae* and *Rajidae* is a result of the less dorso-caudal compression of the frontal mantle area in *Laemargus*.

It is a remarkable fact that in my *Laemargus* specimen the art. chorioidei anterior at the left arises together with the art. posterior cerebri, while at the right the chorioidea anterior arises as a separate artery, the dorsal mantle branches arising as bifurcations of the arteria cerebri media.

Of the reptiles I principally examined the turtles (*Testudo tabulata* and *gigantea*, *Chelone midas* and *Dammonia subtrijuga*) and a Crocodile (*Crocodilus porosus*).

Whereas HOFMANN in *Testudo graeca* found the posterior carotis branch (the communicans posterior of human anatomy) at both sides running medially from the oculomotorius root. I found in my *Chelone midas* the left branch running medially, the right one laterally from the oculomotorius root, the same as in *Laemargus* (cf. figure). Again here it is remarkable that the communicans posterior running medially from the III root is the stronger one, thus showing clearly the hydrodynamic influences acting on the course of this artery.

The frontal carotis branches, run as follows: Before the curve of the carotis the art. ophthalmica¹⁾ arises. It runs under the N. opticus and in *Chelone midas* forms a small art. communicans ophthalmica under the optic chiasma. In the carotis curve itself the art. cerebri media and anterior arise from one stem. This common stem might be called carotis cranialis. It soon bifurcates in an art. media and anterior cerebri. The art. cerebri anterior has no distinct communication with the same artery of the other side (no communicans anterior). Upon the septum a few branches of it turn backward, but for a small distance only²⁾.

The main stem of the art. anterior runs further frontally and bifurcates in the fissura postrhinica (which separates the lobus olfactorius anterior from the hemispheres proper) in medial and lateral branches.

It vascularises the lobus anterior and the olfactory stalk (tr. olfactorius), not the hemisphere of the brain. Contrary to the relative diminution of the

¹⁾ HOFMANN did not succeed to demonstrate this artery. It is very small even in the much larger Reptiles I examined.

²⁾ RATHKE and HOFMANN found in snakes (*Tropidonotus natrix*) a far backwards running branch of this artery on the dorsomedial wall as an impair artery as I found in *Rhina squatina*, (c.f. RATHKE. Bemerkungen über die Carotiden der Schlangen l.c. infra). — That the artt. cerebri anteriores do not form an impair artery in *Chelone* is probably caused by the fact that the hemispheres in *Chelone* remain more separate, than in snakes.

vascularisation area of the art. anterior cerebri the area of distribution of the art. cerebri posterior has considerably enlarged (see below). This has to be explained by the fact that in reptiles, in contrast with fishes, the greater part of the forebrain (the hemispheres proper) is not a lobus olfactorius anterior but a lobus olfactorius posterior (= lobus piriformis).

The art. media cerebri which in the Plagiostomes is represented by the lateral olfacto-bulbar artery, in *Chelone* and the other reptiles examined has much more the character of a real arteria cerebri media, its bifurcations on the lateral mantle wall being more numerous than those on the lateral olfactory bulb. This lateral mantle wall, or pallium, in Reptiles, however, is no neopallium as it is in mammals, but a part of the lobus piriformis and these lateral branches should be considered as the homologues of the artt. piriformes also demonstrated in Mammals (c.f. SHELLSHEAR l.c. infra).

The most dorsal part of the hemispheres is supplied by the art. cerebri posterior. In my Chelonians this artery originates from the caudal carotis branch (or communicans posterior), entirely independantly from the arteria chorioidea ventriculi lateralis and tertii, which arises just before it. The vascularisation area of the art. cerebri posterior in these reptiles extends as far frontally as the hind border of the lobus olfactorius anterior where it anastomoses in the fissura post-rhinica with branches of the art. cerebri anterior (see figure). While thus the area of the arteria anterior cerebri has diminished, that of the arteria posterior cerebri has enlarged, this artery providing the whole dorsal mantle till the fissura postrhinica, i. e. the dorsal side of the hemispheres proper which also contain the amygdala and the hippocampus (= lob. sphenoidalis of CAJAL).

In *Dammonia subtrijuga* both artt. cerebri posteriores are fused to form an impair artery in the dorsal midline as occurs also in Crocodiles ¹⁾ (c.f. also RATHKE ²⁾ and SHELLSHEAR ³⁾).

A remarkable point, with the arteria posterior cerebri in Crocodiles is that it does not arise from the posterior carotis branch (or communicans posterior) but as a branch of the frontal curve of the carotis and that (presumably in connection herewith) it is again united at its origin with the arteria chorioidea anterior. This origin of the art. posterior cerebri from the frontal carotis branch, already observed by RATHKE and SHELLSHEAR in Crocodiles, is found again in birds (*Anser*, *Turdus*, *Gallus* examined by HOFMANN, *Antigone australiasiana* and *Vultur* by myself). Probably this origin of the art. posterior cerebri is no consequence of a frontal

¹⁾ This is connected presumably with the lesser space between both hemispheres in *Dammonia* and in the crocodile, see foot note p. 54.

²⁾ RATHKE. Bemerkungen über die Carotiden der Schlangen. Denkschr. Kais. Akad. der Wissensch., Wien. Bnd XI. 1856. Untersuchungen über die Aortenwurzeln der Saurier, Ibidem B. XIII, 1857.

³⁾ SHELLSHEAR. A study of the arteries of the brain of the spiny anteater (*Echidna aculeata*) to illustrate the principles of arterial distribution. Transactions of the Royal Soc. Series B. Vol. 218, 1927.

shifting of its emergence but rather of a more caudal position of the stem of the cerebral carotis¹⁾ in birds.

In *Anser* the resemblance of the posterior cerebral artery with the homologous artery in crocodiles is still more complete since, according to HOFMANN it arises together with the art. chorioidea anterior and besides fuses in the middle fissure of the forebrain with the corresponding artery of the other side, running frontally as an impair vessel on the medial wall. This is not so in *Gallus*, *Turdus* and *Antigone*.

In *Antigone australiasiana* I was struck by the presence of two arteriae cerebri posteriores at both sides, arising closely behind each other from the frontal carotis bifurcation. The frontal art. cerebri posterior (see figure P. A.) extends far frontally over the medial brainwall, the posterior (P. P.) one supplies the occipital pole only. Both, but especially the former also supplies a part of the convexity.

The art. anterior cerebri in birds has a distinct anastomosis with the anterior of the other side (communicans anterior). The main stem runs over the tuberculum parolfactorium and supplies only a part of the basis and a small part of the front pole of the hemispheres including the greatly diminished lobus olfactorius anterior, as it does in reptiles.

The art. cerebri media has enlarged and supplies the greater part of the basis (rami orbitales) and a part of the convexity of the frontbrain (rami piriformes) but also the lateral side of the bulbus olfactorius.

For the Monotremes the data concerning the cerebral vessels of Ornithorhynchus are very scanty.

MECKEL²⁾ and HOCHSTETTER³⁾ give nothing. HYRTL⁴⁾ says only about the carotis cerebialis that she passes through the skull near the upper nasal septum. Of the cerebral vessels proper he says nothing. TANDLER⁵⁾ gives a drawing of the circulosus arteriosus of Ornithorhynchus and says about the cerebral vessels proper only that the art. cerebri anterior fuses to an impair stem that runs backwards along the medial wall as an art. corp. callosi and further that the main stem of the carotis, the media turns backward as an art. Fossae Sylvii. Of the posterior cerebri he says that it is "ganz schwach". This agrees entirely with my own results.

Of Ornithorhynchus I had only one somewhat putrified cerebrum fixed in the skull. Nevertheless the following facts could be stated clearly:

The carotis is strongly developed and from its frontal curve the art. cerebri anterior and the art. cerebri media originate⁶⁾. The art. anterior cerebri, which in my specimen (see figure) is thicker at the left than

1) While the carotis curve in most animals lies on the level of the chiasma, in birds it lies near the III root.

2) MECKEL. De Ornithoryncho paradoxo descriptio anatomica, Lipsiae, 1926.

3) HOCHSTETTER. Beiträge zur Anatomie und Entwicklungsgeschichte des Blutgefäßsystems der Monotremen. Semon's Forschungsreisen in Australien. Bnd. II Lief. III 1896.

4) HYRTL. Beiträge zur vergl. Angiologie, IV. Das arterielle Gefäßsystem der Monotremen. Denkschr. der Kais. Akademie der Wissensch. Wien, Bnd. V. 1853.

5) TANDLER. Zur vergl. Anatomie der Kopfarterien bei den Mammaliern. Bnd. 67, 1899.

6) I did not trace the arteria ophthalmica in my specimen.

at the right side penetrates in the median basal fissure (between the tubercula olfactoria) where it joins the contralateral artery (see fig. at +), thus forming a big impair stem, that again bifurcates (see fig. at X) above the commissures (comm. anterior with the ventral callosum and the dorsal psalterium). On top of this commissural complex it again divides giving a branch to the left and one to the right medial hemisphere wall, running backwards at both sides in a curve as in higher mammals. After having given off a few small frontal branches during this course it has its largest bifurcation behind the posterior half of the hemisphere in a dorsal branch that extends in two or three side branches on the convexity of which they vascularise a rather large part (but not such a large part as in *Echidna* is vascularised by the posterior cerebri, see below). After the emergence of this dorsal branch the original stem — greatly diminished in size — runs further backwards anastomosing with a branch of the posterior cerebri, which anastomosis, however, is hardly visible.

The arteria cerebri media has a small orbital branch and 3 or 4 lateral or piriform branches. At the right the third, at the left the second piriform branch (M) is the largest one and probably represents the beginning of an arteria fossae Sylvii. This branch, soon dividing in various side branches, extends, in dorsal and caudal direction on the lateral brain wall, approaching the dorsal main branches of the art. cerebri anterior, that supply the largest part of the dorsolateral mantle.

As already observed by TANDLER the art. posterior cerebri is very small in *Ornithorhynchus*. It arises from the communicans posterior rather far backward, in front of the III root, and principally supplies the medio-ventral surface of the occipital lobe. As stated above it appears (by pulling at the arteries) that there is an anastomosing branch between the anterior and posterior artery. Though this anastomosing branch is very small it forms a closed *arcus arteriosus medialis*.

The communicans posterior is well developed and the arteria basilaris is rather big (about as big as the carotis).

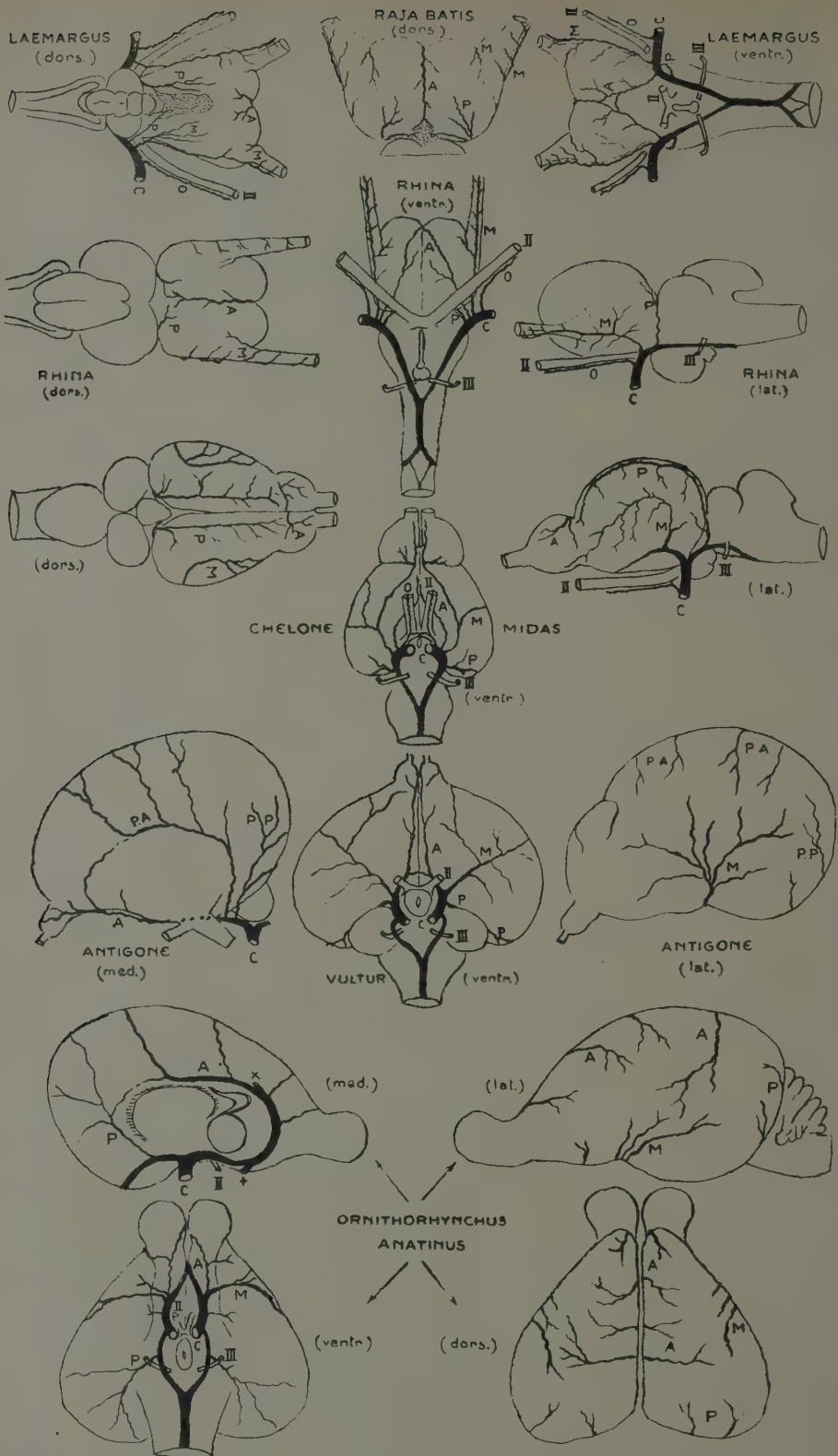
The chief difference with the reptiles and birds thus is that the area of the art. cer. anterior has considerably enlarged in *Ornithorhynchus*. It vascularises nearly the whole medial brainwall and the larger part of the convexity.

In *Echidna* the relations are different, as appears from the excellent discription given by SHELLSHEAR (l.c. infra), which I can confirm in every detail, thanks to some *Echidna* brains presented to the Institute by Prof. J. P. HILL (London) to whom I am much indebted for this precious material.

The chief difference is that contrary to *Ornithorhynchus*, of both components of the *arcus arteriosus medialis* the art. cerebri posterior is very large and the art. cerebri anterior very small in *Echidna*.

As in *Ornithorhynchus* the latter is partly impair (in the basal median fissure).

The large art. cerebri posterior of *Echidna* arises from the caudal carotis



A = art. cerebri anterior; M = art. cerebri media; P = art. cerebri posterior;
 C = Carotis cerebialis; O = art. ophthalmica; II = optic nerve; III = oculomotor nerve.
 P.A. and P.P. (in Antigone only): art. posterior anterior and art. posterior posterior.
 The dotted area in the forebrain of Laemargus and Raja is the anterior choroid plexus.

branch¹⁾ or communicans posterior close in front of the III root and runs very far frontal as it does in reptiles (and birds), in *casu*, however, on the medial wall of the brain, near the fiss. chorioidea, anastomosing frontally with a tiny branch of the anterior cerebri.

In addition to most of the medial surface the posterior cerebri vascularises by far the largest part of the convexity which here, as in *Ornithorhynchus*, consists of a proper neocortex. The art. media cerebri (the second piriform continued) takes only a small part in the vascularisation of the neocortex. This is the more remarkable since already in *Chelone* and principally in birds the arteria cerebri media extends over such a large part of the convexity.

I have, however, already called attention to the fact that the convexity of the hemispheres in *Chelonians* practically corresponds with the lobus piriformis of mammals, not with the neopallium. Since in reptiles a neopallium proper does not occur²⁾, the piriform area in these animals is not pressed so much ventrally as in mammals is effected by the growth of the neopallium. Since in *Echidna* the neopallium is more developed (SCHUSTER), than in *Ornithorhynchus* the lobus piriformis is more compressed and lies nearly entirely ventrally in *Echidna*. The lateral orbital area of *Echidna* and the lobus piriformis are supplied by the art. media cerebri, viz. by art. orbitalis lateralis and the artt. piriformes of SHELLSHEAR³⁾.

That the greater part of the convexity is supplied by branches of the circulus arteriosus medialis we observed already in *Ornithorhynchus*, but whereas in the latter the arteria cerebri anterior acts the largest part in it in *Echidna* the art. cerebri posterior is the chief artery for this circle.

Correlating the results of the electric stimulation experiments in *Ornithorhynchus* made by MARTIN⁴⁾ with my findings about the vascularisation, it appears that the motor (probably sensu-motor) neocortex in *Ornithorhynchus* has developed on the border of the vascularisation by the medial arcus arteriosus and of the art. media cerebri, being practically vascularised by the medial arcus arteriosus. That this area corresponds, partly at least, with the areae 4 and 6 of BRODMANN appears from the investigations of ROSE⁵⁾.

In *Echidna* SCHUSTER⁶⁾ the anterior three quarters of the convexity are rather homogeneous. His fig. 4 resembling the motor cortex of lower

¹⁾ The arteria chorioidea has an independent origin.

²⁾ At best a small primordium of a neo- or general cortex (as Dr. CROSBY calls it) is to be found here.

³⁾ Also the first piriform artery extends a small distance on the neopallium (SHELLSHEAR).

⁴⁾ CH. J. MARTIN. Cortical localisation in *Ornithorhynchus*. Journ. of Physiology. Vol. 23, 1898—99.

⁵⁾ Gyrus limbicus and regio retrosplenialis. Journ. f. Psych. und Neurol., 1928 (fig. 1).

⁶⁾ SCHUSTER. Preliminary note upon the cell lamination of the cerebral cortex in *Echidna*. Proceed. Roy. Soc. London. Ser. B. Vol. 82, 1909.

mammals, in absence of stimulation experiments we may accept that this area (type III of SCHUSTER) is homologous with the lateral, sensu-motor cortex of *Ornithorhynchus*. After MARTIN's researches on *Ornithorhynchus* this area has to do with the cortical innervation of the enormous facialis musculature, which in both animals extends not only over the head and neck, but also over the shoulder and forelegs ¹). This neo-cortex vascularised in both animals by the medial arcus arteriosus, in *Echidna* is obviously still larger than in *Ornithorhynchus* and this may explain that the extension of the dorsal branches of the arcus arteriosus medialis on the convexity is also larger in *Echidna* than in *Ornithorhynchus*.

Why, however, in *Ornithorhynchus* principally the art. cerebri anterior supplies this neocortical area, whereas in *Echidna* it is supplied by the arteria posterior cerebri, in other words why in *Ornithorhynchus* the anterior and in *Echidna* the posterior artery is the most important factor in the arcus arteriosus medialis, is difficult to say. One would naturally ask if it may be explained by the fact, that the cerebral carotis in *Echidna* is small and the communicans posterior large, while in *Ornithorhynchus* the carotis is strongly developed. Though this is true, in some Rodents the carotis compared with the communicans posterior, is still smaller than in *Echidna* and in *Sciurus* (according to my own experience and that of TANDLER and DE VRIESE ²) the carotis cerebialis even fails while the art. anterior cerebri, though receiving its blood from the communicans posterior only, is not smaller here than the posterior cerebri and certainly extends further backwards over the medial wall of the brain than it does in *Echidna*.

Considering the frontal compression of the brain in *Echidna*, which according to ELLIOT SMITH ³) acts such a large part in its peculiar fissuration, it cannot be excluded that this factor also acts on the anterior artery, the impair part of which is very much compressed in the narrow interhemispherical fissure of this animal.

With higher mammals ⁴) we find analogous relations as occur in man: the arteriae anterior and posterior, supplying chiefly the medial brainwall extend for a small part only over the convexity, which is principally, supplied by the art. cerebri media, that in Primates also vascularises the cortical facialis center.

¹) E. HUBER. Studies on the organisation of the Monotremes etc. *Morph. Jahrbuch*. Bd. 66, 1931.

²) BERTHA DE VRIESE. Sur la signification des artères cérébrales chez les mammifères. *Arch. de biologie*. Tome 21, 1905.

³) R. BURNE and ELLIOT SMITH. Catalogue of the Royal College of Surgeons, 1902, p. 145.

⁴) Great variations occur in the origin of the art. cerebri posterior (HOFMANN). In some mammals (e.g. deer) it arises very frontal (HOFMANN's art. cerebri posterior a.) and coincides with the art. chorioidea anterior, in others directly behind this latter from the frontal part of the communicans posterior (HOFMANN's type b) but generally still more caudally directly in front of the III root, ascending in front or behind the geniculatum mediale (type c. and d of HOFMANN).

In the Ungulates, however, the cortical facialis centre still lies in the vascularisation area of the anterior cerebri (compare the stimulation experiments on sheep by SUTHERLAND SIMPSON and KING¹⁾ with HOFMANN'S investigations about the vascularisation in this animal).

Even in the Carnivora (*Procyon lotor*, SIMPSON)²⁾ this partly occurs, not completely though. The dorsal branches of the art. cerebri anterior extend in these animals till the fiss. coronalis where the vascular area of the arteria media cerebri begins.

We know, however, that in Anthropoids (LEYTON and SHERRINGTON) and in man the cortical facialis centre is vascularised only by the arteria cerebri media. This difference with regard to the vascularisation to my opinion should be explained by the facialis centre being pressed downward by the gradual superposition of other cortical motor centres (trunk and lower limbs chiefly), not yet present in lower mammals. That the arcus arteriosus medialis does not increase in conformity to the motor area, may be due to the fact that the hydrodynamic conditions for the arteria cerebri media, especially for the art. fossae Sylvii are so much better (BOK).

So in this respect there is a great difference between lower and higher mammals.

On the other hand among Anthropoids and man the arteriae cerebri show a great fundamental conformity in their branchings. This conformity lies not in the extent of the areas which these branches supply, for, as shown by SHELLSHEAR³⁾, whose work — as far as the Chimpanzee is concerned — was confirmed by HINDZE⁴⁾, this varies with the different size of the cytotoxic regions, which they supply. The constancy meant is in the number and origin of the different branches of the art. cerebri media in Primates and the nature of the regions which they supply.

Similarly we may state that among the Monotremes the difference, occurring between *Ornithorhynchus* and *Echidna* in the part of the art. anterior and posterior cerebri in the vascularisation of the dorso-lateral neocortex, is surpassed by the fact, that in both cases this vascularisation is effected mainly by the arcus arteriosus medialis and hardly by the art. media cerebri.

¹⁾ SIMPSON and KING. Localisation of the motor area in the sheep. Quart. Journ. of experiments. Phys. Vol. 4. 1911.

²⁾ SIMPSON. The motor cortex in the raccoon (*Procyon lotor*) Bub. Soc. f. exper. biol. and med. Vol. 10, 1912.

³⁾ SHELLSHEAR. The arteries of the brain of the Orang-oetan. Journ. of Anatomy. Vol. 61, 1927.

SHELLSHEAR. A contribution to our knowledge of the arterial supply of the cerebral cortex in man. Brain. Vol. 50, 1927.

SHELLSHEAR. The arterial supply of the cerebral cortex in the chimpanzee (*Anthropopithecus troglodytes*). Journ. of anat. Vol. 65, 1930.

⁴⁾ HINDZE. Die Hirnarterien des Chimpansen. Zeitschr. für Morphologie und Anthropologie, Bnd. 27, 1930.

Nevertheless the different vascularisation of the cortical facialis centre in lower mammals (Monotremes, Ungulates) at one side and the Primates at the other side shows that the constancy of relation between bloodvessels and cortical centra is no more valid, when comparing phylogenetically remote animals.

Physics. — *The cosmic corpuscular ultra-radiation. V. Ionisation in the Stratosphere and in the highest layers.* By J. CLAY. (Communicated by Prof. P. ZEEMAN.)

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

§ 1. After having found, in our previous communication IV¹⁾, a basis for an explanation of the variation of intensity of the ultraradiation in the Earth's magnetic field and of the variation in hardness, we now wish to discuss, in how far the remaining phenomena are in agreement with this explanation. In the first place REGENER's²⁾ splendid measurements in the stratosphere should be considered, the more so, since at first sight one might think, that for lower magnetic latitudes an ionisation as high as found by REGENER could not be expected, the reason being that, according to STÖRMER's theory, no electrons of lower energy could be incident. We expect, however, that this ionisation near the magnetic equator will be somewhat less, corresponding to the smaller number of primary rays, but that apart from this the ionisation curve will have about the same shape as found by REGENER at 50° magnetic latitude.

In the first place we may convince ourselves, that the high ionisation of e.g. 90 ions which REGENER found at an altitude of 10 km can only to a small extent be due to an increase of the intensity of the primary rays, for the following reason.

Rays from outside penetrating the atmosphere to an altitude of 10 km, have already passed through $\frac{1}{4}$ of the atmosphere and therefore originally had a minimum energy which is $\frac{1}{4}$ of the minimum energy required to reach the earth's surface or 10^9 e.Volt. But this shifting of the lowest energy limit from 4×10^9 to 10^9 e.Volt does not seem capable of causing an increase of primary rays by a factor 25, as would be necessary if we wish to attribute the ionisation observed by REGENER to primary rays only.

It appears, however, that the existence of such a large increase of ionisation with altitude may be expected on account of the influence of the secondary rays, if we take into account the influence which the pressure in the atmosphere should have.

In dealing with this matter, we shall not enter into the question as to in how far collisions of primary rays in the atmosphere might give rise to

¹⁾ Proc. Royal Acad. of Amsterdam, **35**, p. 1282, 1932.

²⁾ E. REGENER. Die Naturwissenschaften, **20**, p. 695, 1932.

hard gamma rays, although it seems certain that such a process occurs occasionally. Though such gamma rays could of course only ionise by again producing corpuscular rays, some difference in the result may be expected, due to the intervening process of absorption of gamma rays. A more accurate knowledge concerning these collision phenomena will be needed, before this question can be more precisely dealt with.

§ 2. Let us consider first the barometer effect, discovered by MYSSOWSKI and TUWIM¹⁾. This effect is now accurately known by the researches of the Halle school under the leadership of HOFFMANN, in particular MESSERSCHMIDT's data²⁾. Let us now see how we expect the intensity of radiation to vary with varying barometric pressure. We then have to distinguish between rays of such energy that they pass through the whole of the atmosphere, or eventually a much thicker layer of matter, on the one hand, and rays which can only pass through part of the atmosphere on the other hand.

For all rays the equation

$$\frac{dI}{I} = -\mu d(D)$$

holds, where $d(D)$ is the increase in thickness of the layer of matter given by an increase in barometric pressure of 1 centimeter of mercury. For the first group of rays, which pass through the atmosphere to its whole extent, $d(D)$ is equal to 0.136, if μ be expressed per meter of water. From this follows that for such rays the barometric effect increases proportionally to μ .

Let us now, however, discuss the second group of rays, which are formed inside the atmosphere and of which the penetrating power is only a fraction of the atmosphere. Denote by μ_1 the absorption coefficient for this kind of rays which corresponds to the thickness D of the atmosphere. Then secondary radiation having an absorption coefficient $n\mu_1$ will have a maximum path of length D/n in the atmosphere, and the maximum variation of intensity of such radiation for a variation in pressure of 0.136 meters of water will be $\frac{dI}{I} = -n\mu_1 \frac{0.136}{n} = -0.136 \mu_1$.

If therefore the increase in pressure had no other influence than indicated above, the rays of less high energy (less hard rays) would at most have an equal, but in general a smaller barometer coefficient than the harder rays. Something quite different is observed. The barometer effect is *highest*, when the shielding is least, that is for rays of lower energy. This indicates that for higher pressure the *number* of rays of low energy decreases. This assumption is confirmed by the fact that for the same shielding but at higher altitude, that is at smaller pressure, the barometer coefficient

¹⁾ L. MYSSOWSKI and L. TUWIM. Zeitschrift für Physik, **39**, 146, (1926).

²⁾ W. MESSERSCHMIDT. Z. f. Ph., **78**, p. 668, (1932).

increases appreciably, which means that at this lower pressure the number of secondary corpuscular rays found is greater.

For primary radiation having an absorption coefficient of 0.020 per meter of water and the hardest secondaries, of which the absorption coefficient is 0.075 per meter of water, the intensities are in the ratio 0.12 to 0.7¹⁾, which leads to an average absorption coefficient of 0.066 per meter of water. For this radiation the barometer coefficient $\frac{dI}{I} = -0.066 \times 0.136 = -0.0090$ is to be expected. Accurate measurements by MESSERSCHMIDT yield a barometer coefficient of 0.0104 with a shield of 20 cm of lead. However, this shield does not exclude radiation with a somewhat larger μ .

Let us further compare the measurements by MESSERSCHMIDT²⁾ in Halle (110 m), in a surrounding of 75 cm pressure, with those by LINDHOLM at Muottas Muraigl at an elevation of 2456 meters and a pressure of 56.5 cm³⁾. For the same shielding, the values found in the low pressure surrounding are largest, as is shown by the following figures. In 10 cm of lead, the barometer coefficient in Halle is 0.0184, and in Muottas Muraigl 0.0400, and without shielding 0.0192 in Halle and 0.0845 in Muottas Muraigl.

Without shielding MESSERSCHMIDT's observations of intensity deviate from proportionality for a decrease in pressure of 3 cm of mercury, in the sense that the ionisation increases more rapidly. We think that also the reason for this is that the number of secondary (tertiary etc.) corpuscles accompanying one primary *and having sufficient energy to penetrate the ionisation chamber* decreases with increasing pressure, which assumption was stated above. This may be due to the chance for the formation of a new secondary becoming smaller, as the energy of the primary decreases, which may be made plausible by the following reasoning. Assuming the effective area for a nucleus and an electron to be the same, its ratio to the effective area of the atom as a whole is as 1 to 10⁸. Since for oxygen the number of extra-nuclear electrons is 8, for nitrogen 7, we assume that the probability for the formation of a secondary ray and the probability for an ionisation have the ratio 1 to 10⁷. For the ionisation of 10⁷ atoms 3.2×10^8 e. Volt must be lost, after this also a secondary ray will be produced, on the average. That is: for a primary corpuscle of 3.2×10^8 e. Volt the probability of the formation of a secondary is 1. Further: the number of corpuscles of high energy accompanying a primary ray must be independent of the density of the gas, since, for a higher density, the number of secondaries produced increases, but their ranges diminish in the same ratio. However, this is different for corpuscles of low energy. We

¹⁾ The values are taken from a private communication by Prof. REGENER and differ only slightly from those published by him in *Nature* **127**, 233, (1931).

²⁾ W. MESSERSCHMIDT. *Zeitschrift für Physik*, **78**, 668, (1932).

³⁾ F. LINDHOLM. *Gerland's Beiträge zur Geophysik*, **22**, 141, (1929).

only need to consider rays having an energy larger than 10^6 e. Volt, since 1.6×10^6 e. Volt was required in order to pass through the brass well of thickness 0.5 mm of REGENER's ionisation chamber. Suppose we have a ray of only 3.2×10^6 e. Volt, then the chance for the production of one secondary has gone down to $1/100$, and in this case the range will be diminished at higher pressure, but the chance for a replacement by a new secondary will be practically negligible. In this way one may possibly understand, why for a higher pressure the number of corpuscular rays passing through a space of 1 cc becomes less. We have, at any rate, that for lower pressure this number must be much larger, as is found experimentally (LINDHOLM's and MESSERSCHMIDT's results of barometer-effect as seen above).

Independently of the above consideration, which perhaps does not sufficiently elucidate the mechanism producing the secondary ray intensity, it is therefore experimentally certain that the number of secondaries of lower energy depends on the pressure, in the sense that it decreases for increasing pressure. For the higher layers we shall now assume, that this number is indirectly proportional to the pressure¹⁾, and this is the only postulate which we now use in order to discuss quantitatively REGENER's ionisation curve in the higher layers.

§ 3. Let us consider the whole of the atmosphere to be reduced to normal pressure, which is expressed in meters of water. Passing from the upper boundary downward, the intensity of primary radiation will decrease according to the well known law

$$I = I_0 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta e^{-\mu \sec \theta} d\theta.$$

In this formula, I_0 is the intensity of primary radiation incident at the upper boundary, μ the absorption coefficient of this radiation, which, according to REGENER's experiments is equal to 0.0206 per meter of water, and H the depth below the upper boundary in meters of water.

The value of this integral may be obtained from GOLD's tables²⁾. This primary radiation produces secondaries, with which, however, it becomes saturated only after it has passed through a certain thickness of the atmosphere. In our previous communication we found that the secondaries have an average range of 2.6 k.m. of normal air. We shall therefore assume that the primary rays are saturated with secondaries, after they have passed through a portion of the atmosphere equivalent to 3 meters of water. We may add, that the results are changed but little, if 3.5 meters or 2.5 meters is assumed, but in any case further investigation will fix this value more precisely.

¹⁾ For the layers near the earth, the variation seems to be even more than this.

²⁾ E. GOLD. Proceedings of the Royal Society A **82**, 62, (1918).

If now, we consider a layer which is higher, we cannot have saturation, but the secondary ionisation expressed in its saturation value may then be calculated in the following manner.

Let A be the point in question, at a distance h below the top of the atmosphere. We surround A by a sphere of radius r , which represent the range necessary for producing saturation. Both h and r are expressed in meters of water.

For secondary rays originating within an elementary solid angle $d\omega$ having its vertex at A , the ionisation produced in a closed vessel at A is

$$k \varrho d\omega$$

if ϱ the distance from A within which the secondary rays are produced, and k a factor of proportionality.

If $h \geq r$, there is saturation at A , and the intensity of ionisation measured at this point is

$$2\pi k r$$

as is found by integrating the above expression over the hemisphere.

If $h = ar$ and $a < 1$, the sphere intersects the upper boundary of the atmosphere, which is considered as a plane. The vertically shaded region represents radiation saturated at A , and the corresponding portion of the integral is $2\pi k r a$. The horizontally shaded region represents radiation which is only partly saturated at A , and the corresponding portion of the integral is

$$k \int_0^{\alpha_1} \frac{a r}{\cos \alpha} 2\pi \sin \alpha d\alpha = -2\pi k r a \lg a.$$

In total, the intensity of ionisation at A is therefore $2\pi k r a (1 - \lg a)$, and the desired ratio of secondary ionisation to its saturation value is therefore

$$a(1 - \lg a).$$

The assumptions involved in the above are that the secondary radiation accompanying a primary ray is proportional to the distance travelled in the atmosphere, as long as this distance is smaller than r , that the emission of secondaries from a volume element occurs uniformly over a hemisphere, downward, and that there are no primaries with a range smaller than r .

We now wish to determine the amount of primary radiation which may penetrate in the layer at A from below. For this we first have to know, at which point horizontal rays may penetrate, in other words the point where the horizontal direction is equivalent to 2×100 meters of water.

To this end, we first determine the density of the air at the point in question, and then imagine all of the atmosphere above this point to be compressed to this density. This point B be at x meter water pressure below the top of the atmosphere, so that x , in general might have all values from

0 to 10.33. The density of the air at B is therefore $\frac{x}{10.33} 0.00129$. The air above B , which corresponds to x meters of water has, if compressed to this density, a thickness of 8000 meters assuming $t=0^\circ \text{ C}$.

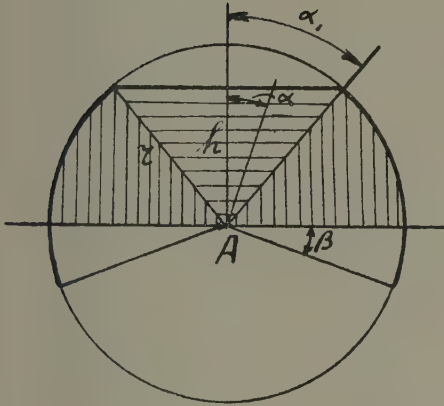


Fig. 1.

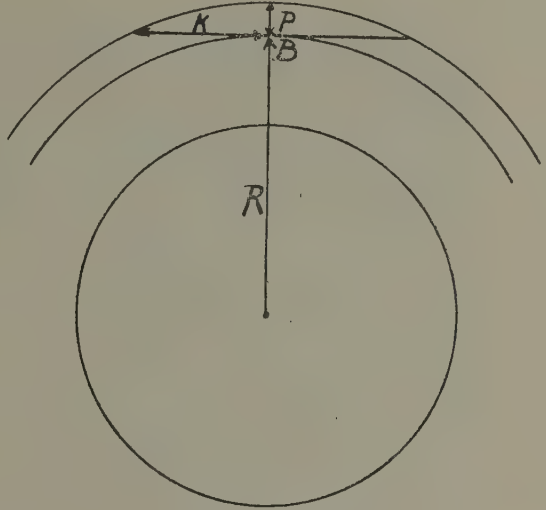


Fig. 2.

Now $p \times 2R = k^2$, where the thickness of the atmosphere has been neglected with respect to R . Since $R = 6300 \text{ km}$, we have $k = \sqrt{2 \times 8 \times 6300} = 318 \text{ km}$. The water-equivalent of these 318 km is found by multiplying this length with the reduced density assumed above, and is therefore

$$318 \times \frac{x}{10.33} 0.00129 = 40x \text{ meters.}$$

Since this has to be equal to the range of 100 meters, we find $x = 2\frac{1}{2}$. The desired layer, at which horizontal primary rays may penetrate, and which we shall name the "layer of zero dip"; is therefore situated at an altitude of about $2\frac{1}{2}$ meters of water below the top of the atmosphere, if an average energy of $3 \times 10^{10} \text{ e. Volt}$ for primaries is assumed. We shall adopt the value of 10 kilometer for its altitude above the Earth's surface.

§ 4. Proceeding to greater altitudes, a certain fraction of the primary radiation comes from below, the intensity of this fraction being determined by the dip β of the horizon. We have $\sin \beta = \sqrt{\frac{2H}{R}}$, where H the altitude above the saturation layer mentioned above, and R the radius of the Earth, so that $\sin \beta = 0.0178 \sqrt{H}$ if H be expressed in kilometers. Since the ratio of the solid angle subtended by to the hemisphere is equal to $\sin \beta$, the

intensity of the primary radiation incident from below is given by the intensity in the layer of zero dip, multiplied by $\sin \beta$. This amount is to be added to the intensity of the primary radiation incident from above.

TABLE I
Ionisation in a closed vessel in the stratosphere.

meter water equivalent below top of atmosphere	pressure in mm. Hg	altitude km. above sealevel	(a) primary intensity calculated (Gold).	(b) $a(1 - lg . a)$	(c) dip of horizon	$ab + c$	$\frac{1}{p}$	ionisation calculated in arbitrary units	observed ionisation (Regener)	ratio $\times 100$
10	760	0	0.574			0.574	1	0.574		
9	684	0.7	0.602			0.602	1.1	0.662		
8	608	1.6	0.630			0.630	1.25	0.787		
7	532	2.6	0.657			0.657	1.43	0.940		
6	456	3.7	0.690			0.690	1.67	1.152		
5	380	5.1	0.722			0.722	2.0	1.444		
4	304	6.7	0.761			0.761	2.5	1.902	53	36
3	228	8.9	0.804	1	0	0.804	3.33	2.677	77	35
2.7	205	9.7	0.818	0.995	0.016	0.830	3.70	3.071	90	34
2.4	182	10.5	0.833	0.978	0.023	0.838	4.17	3.494	109	32
2.1	160	11.5	0.849	0.949	0.029	0.835	4.76	3.975	133	30
1.8	137	12.7	0.865	0.906	0.035	0.819	5.56	4.554	177	26
1.5	114	14.1	0.882	0.846	0.041	0.787	6.67	5.249	203	26
1.2	91	15.8	0.901	0.766	0.047	0.737	8.33	6.139	233	26
0.9	68	18.0	0.920	0.661	0.054	0.662	11.11	7.355	248	30
0.6	46	21.0	0.942	0.522	0.062	0.554	16.67	9.235	264	35
0.3	23	26.2	0.964	0.333	0.074	0.392	33.33	13.065	270	48
0.15	11	31.9	0.975	0.120	0.085	0.203	66.66	13.534	273	49

The intensity ratios, calculated at different heights, are given in column 9 of Table 1, the ionisations observed by REGENER are given in column 10, however for the first value in this column KOLHÖRSTER's observation ¹⁾ has been used, since REGENER's values do not extend so far downward. For the lower altitudes, our calculation yields too small values. For the highest altitude the calculated value is too high ²⁾, which may be due, either to unknown factors, or to the fact that the saturation with secondary rays decreases more rapidly than has been computed. However, for the whole of

¹⁾ W. KOLHÖRSTER. Verh. d. Phys. Ges. 16, p. 719, (1914).

²⁾ Note added during the correction:

According to a private communication by REGENER, his most recent measurements yield for the ionisation in the highest layer the values 333 I in stead of 273 I, so that now the result of the calculation for the highest layers is in better agreement with observation. The values given in the table were those taken from REGENER's curve in the paper cited.

the region where the saturation with secondary rays may be considered complete, the calculated relative values are in sufficient agreement with REGENER's measurements. We therefore conclude, that the assumptions we made are in the main not in contradiction with stratospheric measurements of ionisation in closed vessels.

§ 5. Having obtained, in this way, a suitable means to account for the relative ionisation curve for measurements in a closed vessel in the upper troposphere and the stratosphere, as far as data are known, we may now follow the same method for investigating ionisation and conductivity in the highest layers of the free atmosphere, no further assumptions or data being needed.

In the very highest layers, secondary radiation produced by the primaries incident from above may be expected to be practically absent. It is at this point, that the insight just obtained concerning the dip of the horizon, helps us out. The peculiar situation is, that in the highest layers *nearly all of the secondary radiation comes from below*. The number of these secondaries coming from below increases with altitude. In the second column of Table 2, the influence of the dip of the horizon is expressed. We have seen above that the solid angle of the horizontal dip, expressed in the hemisphere

TABLE II
Conductivity of the upper atmosphere.

altitude H km.	$\sin. \beta$ β =dip of horizon above 10 km.	p in mm. Hg	$\frac{\text{ionic number } H}{\text{ionic rr. at 10 km.}}$	$\frac{\text{conductivity } H}{\text{cond. at 10 km.}}$	conductivity E.S.U. $\times 10^7$
10		200	1	1	0.0 ₉ 691
20	0.0564	50.2	2.81	1.118.10	0.0 ₈ 772
30	0.0797	10.6	4.65	8.79 .10	0.0 ₇ 607
40	0.0976	2.29	8.52	7.44 .10 ²	0.0 ₆ 514
50	0.1127	0.496	4.54 .10	1.83 .10 ⁴	0.0000126
60	0.1260	0.108	2.33 .10 ²	4.32 .10 ⁵	0.000298
70	0.1380	0.024	1.15 .10 ³	9.58 .10 ⁶	0.00662
80	0.1491	0.005	5.96 .10 ³	2.38 .10 ⁸	0.164
90	0.1594	0.0013	2.45 .10 ⁴	3.77 .10 ⁹	2.61
100	0.1691	0.00040	8.46 .10 ⁴	4.23 .10 ¹⁰	29.2
120	0.1869	0.000118	3.17 .10 ⁵	5.37 .10 ¹¹	371
140	0.2032	0.000073	5.57 .10 ⁵	1.53 .10 ¹²	1060
160	0.2182	0.00005	8.73 .10 ⁵	3.49 .10 ¹²	2410
200	0.2457	0.000024	2.047.10 ⁶	1.71 .10 ¹³	11810

as a unit, is given by $\sin \beta$. Its value is given in the second column, and the intensity of the secondaries is proportional to this. To this intensity, of course, the action of primaries coming from above and from below, must be added. So the intensity of primaries increases with altitude for two reasons.

In calculating the number of ions in the higher layers of the atmosphere, we may most suitably express it in the ionisation found by REGENER at 10 km as unit. Let q be the number of ions per cc per second produced by radiation in the free atmosphere. In the state of equilibrium, we have $q = \alpha n^2$, where α the coefficient of recombination for the local pressure.

Hence $n = \sqrt{\frac{q}{\alpha}}$. Now, since both q and α are proportional to the pressure, n will be independent of the pressure, for a given number of ionising rays.

The specific conductivity of the air is given by $\lambda = ne u$, where e the elementary charge and u the mobility. Since, for small pressures, u is indirectly proportional to the pressure, λ also increases indirectly proportionally to the pressure. We now are able to calculate the conductivity at various heights in the atmosphere. Its calculated value is given by the last column of Table 2. The values for the pressure used are those which STÖRMER has calculated according to assumptions by JEANS, and are given in column 3. They were taken from VEGARD's treatise in the *Handbuch der Experimentalphysik* XXV, p. 435.

For our calculation we start from the conductivity measured at an altitude of 10 km as a basis. For altitudes of 20 and 30 km we yet have to take into consideration the ionisation by secondaries from higher layers, but at 40 km and higher, this radiation is no more of any importance. For these higher altitudes, all of the secondary radiation comes from the side of the Earth. The interesting and rather unexpected point about the result is that the conductivity, somewhere between 80 and 90 km rises rapidly, and reaches, at 90 km a value corresponding to the conductivity of the humid Earth. Before this, BENNDORF¹⁾ had carried out similar calculations and reached about the same conclusions. However, at that time very few data concerning the intensity of ultraradiation at high altitudes were available, whereas at present the foundation is more certain.

The foregoing shows that the secondary radiation coming from below is capable of giving a complete explanation of the high conductivity at very large altitudes, and that our assumptions are suitable for calculating its magnitude.

Amsterdam, January 18, 1933.

Natuurkundig Laboratorium.

¹⁾ H. BENNDORF. *Phys. Zs.* 27, p. 686, (1926).

Physics. — *Die Intensitätsverhältnisse im Kadmiumspektrum.* Von J. L. VERHAEGHE (Gent). (Vorläufige Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität, Utrecht). (Communicated by Prof. L. S. ORNSTEIN.)

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

Der Summenregel wird bei Anwendung auf erweiterten Multipletts durchaus beim Experiment bestätigt wenn nur kleine Frequenzunterschiede vorkommen. In diesem Sinne haben wir eine Reihe von Messungen in dem Singulett-triplettsystem des Kadmiumspektrums ausgeführt; trotz der vorläufigen Art unserer Ergebnisse, werden an dieser Stelle einige Zahlen mitgeteilt.

In Berücksichtigung kamen die Triplettslinien 2^3P_{012} — 2^3D_{123} ; die Singulettlinie 2^1P_1 — 3^1D_2 und die Interkombinationslinie 2^3P_2 — 3^1D_2 . Wiewohl im erweiterten System mehrere Interkombinationen $\lambda = 3499.4$ (2^3P_1 — 3^1D_2), $\lambda = 6325.19$ (2^1P_1 — 3^3D_2), $\lambda = 6329.97$ (2^1P_1 — 3^3D_1) vorkommen, haben wir die Intensitätsmessungen nicht unternommen; allerdings sind letztere in Bezug auf die stärkere Kadmiumlinien zu vernachlässigen.

Zur Messung der Intensitätsverhältnisse wurde die bekannte photographische Methode verwendet; wir benutzten als Spektralapparat einen grossen Hilgerspektrographen und zur Intensitätsvergleichen kam eine Wolframspirallampe in Betracht. Als Lichtquelle diente ein zwischen Kadmiumelektroden entzündeter Bogen dessen Stromstärke mittels eines Regulierwiderstandes bei allen Messungen auf 2.5 Amp konstant gehalten wurde.

Die Dispersion des Spektrographen war im Ultra-violetten ziemlich stark, da wurde die Spaltbreite-variation mit gutem Erfolg verwendet; der Anschluss an der roten Kadmiumlinie $\lambda = 6438$ wurde mittels Stromstärke-variation gemacht. Zur Messung in der $\lambda = 3612$ -Gruppe wo die Frequenzunterschiede klein, die Intensitätsunterschiede dagegen ziemlich gross sind, wurde bei den Aufnahmen die Hälfte des Spaltes von einem Silberabschwächer mit bekannter Absorption überdeckt.

Die erhaltenen Messergebnisse wurden weiter für die Selbstabsorption korrigiert. In diesem Sinne haben wir die Elektroden aus einer Legierung von Silber und Kadmium in den Verhältnissen 4%; 1%; 0.1% und 0.01% Cd hergestellt. Diese Legierungen könnten in grosser Homogenität erhalten werden; die zwei Metalle bilden in der Tat in diesen Verhältnissen Mischkristalle. Weiter kommen im betrachteten Spektralgebiet keine starken Silberlinien vor.

Wegen der geringen Intensität der Interkombinationslinien könnten letztere nicht aus dem kontinuierlichen Hintergrund erhoben werden. Aus demselben Grunde haben wir von den Messungen an 0.01% Cd absehen müssen, auch für die stärkeren Linien.

Die Ergebnisse unserer Messungen sind aus Tabelle I zu entnehmen; jedesmal wurde die Intensität der $\lambda = 3403$ -Linie auf 100 reduziert. Die Genauigkeit ist etwa 4 %.

TABELLE I.

Wellenlänge	Niveaus	Intensitätsverhältnisse		
		100 %	4 %	0.1 %
3403.60	$2^3 P_0 - 3^3 D_1$	100	100	100
3466.18	$2^3 P_1 - 3^3 D_2$	233	200	192
3467.61	$2^3 P_1 - 3^3 D_1$	64	87	99
3610.51	$2^3 P_2 - 3^3 D_3$	348	297	295
3612.89	$2^3 P_2 - 3^3 D_2$	49	76	96
3614.43	$2^3 P_2 - 3^3 D_1$	4.0	6.6	8.6
6438.47	$2^1 P_1 - 3^1 D_2$	14.4	7.5	—
3649.59	$2^3 P_2 - 3^1 D_2$	1.16	0.59	—

Tabelle II zeigt inwieweit die Intensitätsverhältnisse den bekannten Summenregeln folgen; bereits wurde die ν^4 -Korrektur darin angebracht.

TABELLE II.

Die $\frac{I}{\nu^4}$ -Werte in Verbindung mit der Summenregel.

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	
$d=3$	—	—	5015	$\rightarrow 716 \times 7$
$d=2$	—	2764	1632	$\rightarrow 880 \times 5$
$d=1$	1340	1425	146	$\rightarrow 970 \times 3$
	\downarrow	\downarrow	\downarrow	
	1340×1	1396×3	1358×5	

Wie man leicht sehen kann, stimmt das Verhältnis der $p-d$ Triplettlinien befriedigend mit der Erwartung überein; es ist aber nicht der Fall wenn man versucht die rote Kadmiumlinie an das Multiplett anzuschliessen.

Die Summenregel fordert für das Verhältnis der 6438-Linie, zu dem gesamten Multiplett etwa 1 : 3; d.h. in Bezug auf die in Tabelle II erhaltenen Daten

$$\frac{I(6438) \times 172}{12322} = \frac{1}{3},$$

woraus $I(6438) = 23$.

Die Messung mit der vierprozentigen Cd-Elektroden ergab

$$I(6438) = \frac{7.5}{6.6} \times 8.6 = 9.8$$

Hrn. Prof. Dr. L. S. ORNSTEIN bin ich für sein Interesse an dieser Arbeit zu besonderem Danke verpflichtet. Auch an dieser Stelle sei Hr. G. WILLEMSE für die Herstellung der Silberelektroden besonders gedankt.

Utrecht, }
Gent, } Januar, 1933.

History of Science. — *Het instrumentarium, door VAN SWINDEN bij de invoering van het Metrieke Stelsel gebruikt.* II. Door P. H. VAN CITTERT. (Communicated by Prof. L. S. ORNSTEIN.)

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

Onlangs is door de Stichting „Het Utrechtsch Universiteitsmuseum” aangekocht een groote passerdoos, vervaardigd door METZ, welke blijkens een zich daarin bevindend briefje, toebehoord heeft aan Prof. VAN SWINDEN. Dit briefje is van de hand van Prof. G. D. MOLL en luidt: „Deeze kist met Mathematische instrumenten, daarin zijnde Astrolabium etc., alle door METZ vervaardigd, afkomstig van den Hoogleraar JEAN HENRI VAN SWINDEN is door ANTON BRANDS gekocht op des Hoogleeraars Boekenverkoop den 24 Maart 1824”. In den veilingcatalogus¹⁾ vonden wij de volgende beschrijving van de passerdoos: „Een noteboom Kistje, bevattende in vier Laden eene volledige verzameling van uitmuntende Mathematische Instrumenten, alle door METZ vervaardigd en ongemeen naauwkeurig verdeeld, bestaande in: Passers, Trekpenen, Kaartpassers, Pleinschalen, van gelijke deelen, Choorden, Sinus, Tangenten &c. Voetmaten, ongemeen schoone Proportionaal Passer, Parallellineälen Ellipstrekker, Machine om allerhande kromme lijnen te beschrijven, Waterpassen, Passer met drie punten, Microskoop, keurig Astrolabium met Kompas, Vizieren, Nonius tot minuten, Verrekijker, Toestel om deze te verifiëren, Knie voor het Astrolabium, Quadrant om het geschut te pointeren. Quadrant met Vizieren en Pasloot om de zonshoogte te nemen, enz. alles ongemeen schoon en naauwkeurig.” Al de genoemde instrumenten behalve de passer met drie punten en het mikroskoop waren nog aanwezig.

Onder de verschillende koperen platen met ingesneden verdeelingen bevinden zich o.m. twee halve-voetmaten resp. een halve Rhijnlandsche en een halve Amsterdamsche voet, welke beide door VAN SWINDEN bij zijn vergelijkende metingen over de onderlinge verhouding der maten en gewichten gebruikt zijn. De Rhijnlandsche voet is gesneden op een koperen reep, welke het opschrift draagt: $\frac{1}{2}$ Pedes Rhenolandici, en is verdeeld in 1000 deelen. De andere zijde van den reep draagt een verdeeling, welke

¹⁾ Verg. P. H. VAN CITTERT, Proc. Amst. 34, 707, 1931.

in geen betrekking tot den Rhijnlandschen voet schijnt te staan. Omtrent deze maat zegt VAN SWINDEN in zijn verhandeling over volmaakte Maaten en Gewigten op pg. 555: „Het dubbel van een halven Rhijnlandschen voet, mij toebehoorende, door METZ in 't koper gesneden, en keurig verdeeld, op dezelfde wijze overgebracht en herleid, is gelijk aan 0.3144085 M.". De halve Amsterdamsche voet is gesneden op een fraai bewerkten scharnierenden koperen reep. Op het eene deel is de halve voet gegraveerd. Dit deel draagt het opschrift: „ $\frac{1}{2}$ Pedes Amstelodamensis, divisus in 500 partus", op het andere gedeelte is een schaal gegraveerd om de lengte der koorden bij verschillende hoeken te vinden. Dezen Amsterdamschen voet vermeldt VAN SWINDEN op pg. 60 van de bovengenoemde verhandeling: „Ik heb die Maaten in July 1798, behoorlijk nagegaan. Ik bevond op den 16 dier maand, den Thermometer op 74 gr. staande, dat de beide voeten, op de gemelde twee kopere platen, volkomen overeenkomen; en dat een koperen halve Amsterdamsche voet, door METZ in 500 deelen naauwkeurig verdeeld, en mij toebehoorende, juist de helft van de meergenoemde voeten is".

Door dezen aankoop is de reeds zoo belangrijke „collectie VAN SWINDEN" welke te Utrecht bewaard wordt, weer uitgebreid met een stuk, dat, evenals de andere instrumenten, beteekenis heeft voor de geschiedenis van de invoering van het metrieke stelsel in Nederland.

Mathematics. — *Die projektiven Invarianten von vier Ebenen im R_5 .* Von E. A. WEISS in Bonn. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK.)

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

In einer unter gleichem Titel erschienenen Arbeit ¹⁾ hat R. WEITZENBÖCK gezeigt, dass vier Ebenen a, α, p, π des R_5 ausser den 6 bilinearen Invarianten vom Typus:

$$A_{12} = (a^3 \alpha^3) = 36 \sum a_{123} a_{456},$$

(deren Verschwinden aussagt, dass die Ebenen a und α sich schneiden) noch eine projektive Invariante:

$$I_{1234} = (a^3 \alpha^2 p) (\alpha p^2 \pi^3)$$

besitzen, und dass diese 7 Invarianten zusammen ein kleinstes vollständiges System der vier Ebenen bilden. Die Invariante I_{1234} kann dabei durch die in allen vier Ebenen *symmetrische* Invariante:

$$S = I_{1234} - \frac{1}{6} A_{12} A_{34} + \frac{1}{18} A_{13} A_{42} - \frac{1}{18} A_{14} A_{23}$$

ersetzt werden.

Für das Verschwinden dieser Invariante S möchte ich hier eine geometrische Deutung geben. Die vier Ebenen werden dabei als paarweise wind-

¹⁾ Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 35, 1026—1029, 1932. Vgl. auch ebendort. S. 1123—1125.

schief vorausgesetzt derart, dass je drei von ihnen — als Ort ihrer gemeinsamen Treffgeraden — eine SEGRESsche M_3^3 aufspannen. Im binären Gebiete der erzeugenden Ebenen dieser M_3^3 entsprechen die drei ausgewählten Ebenen den Nullstellen einer gewissen binären kubischen Form. Die vierte Ebene schneidet die M_3^3 in drei Punkten, die drei erzeugenden Ebenen angehören, welche ebenfalls als Nullstellen einer kubischen Form aufgefasst werden können. Wir wollen nun zeigen:

Das Verschwinden der aus vier paarweise windschiefen Ebenen des R_5 gebildeten Invariante S ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die von drei der Ebenen aufgespannte Segresche M_3^3 von der vierten Ebene in einem Ebenentripel geschnitten wird, das zu der kubischen Kovariante des ersten Ebenentripels konjugiert ist.

Beweis: Die Parameterdarstellung der Ebenen von M_3^3 nehmen wir in der kanonischen Gestalt an:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 \end{array} \right\|.$$

Die Ebenen a, α, π sollen den Parametern $\xi_1 : \xi_2 = 1 : 0, 1 : 1, 0 : 1$ entsprechen. p sei zunächst eine beliebige, dem Parameter $\xi_1 : \xi_2$ entsprechende Ebene der M_3^3 . Dann wird:

$$\begin{aligned} I_{1234} &= + 3/3/2/2/3 \xi_1^2 \xi_2, \\ A_{12} \cdot A_{34} &= + 3/3/3/3! \xi_1^3, \\ A_{13} \cdot A_{42} &= - 3/3/3/3! \xi_2^3, \\ A_{14} \cdot A_{23} &= + 3/3/3/3! (\xi_2 - \xi_1)^3; \end{aligned}$$

also:

$$S = 72 \cdot (-2\xi_1^3 + 3\xi_1^2 \xi_2 + 3\xi_1 \xi_2^2 - 2\xi_2^3).$$

Die Invariante S wird daher gleich der kubischen Kovariante der Form $\xi_1 \xi_2 (\xi_1 - \xi_2)$, deren Nullstellen die Parameter der drei Ausgangsebenen a, α, π sind.

Wird jetzt p eine beliebige, nicht notwendig auf M_3^3 gelegene Ebene, so erhalten die ξ_i symbolische Bedeutung — das Produkt von drei Symbolen stellt einen Koeffizienten der kubischen Form dar, die die vierte Ebene im binären Gebiete der erzeugenden Ebenen von M_3^3 bestimmt — und die Gleichung $S=0$ gibt die Bedingung dafür an, dass die Ebene p auf M_3^3 drei Ebenen schneidet, deren Parametertripel zu der genannten kubischen Kovariante konjugiert ist. W.z.b.w.

Wir fügen noch die Bemerkung hinzu, dass die Bedingung dafür, dass die vierte Ebene die M_3^3 der drei ersten in einem Ebenentripel schneidet, das zu dem ersten Ebenentripel selbst konjugiert ist, ebenfalls in allen vier Ebenen symmetrisch ist, sich aber mit Hilfe der A_{ik} allein ausdrücken lässt. Sie lautet:

$$A_{12} A_{34} + A_{13} A_{42} + A_{14} A_{23} = 0.$$

Chemistry. — *Alternations in the Properties of n. Monoalkylmalonic Acids. Some Remarks on MALKIN's Views concerning the Alternation Phenomena.* By P. E. VERKADE and J. COOPS Jr. (Communicated by Prof. J. BÖESEKEN).

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

§ 1. In a previous communication¹⁾ data were furnished for the melting-points and the solubilities at 25°.0 in water and in benzene of a series of *n.* monoalkylmalonic acids and some discussion a propos of these data was added. The heats of combustion of these acids had been determined by us at the same time; publication of these data has however so far remained in abeyance as the interpretation of the numerical data collected raised difficulties. We believed that an investigation of these acids by means of X-rays could contribute considerably in elucidating our insight into the alternation phenomena occurring with these acids and therefore proposed to Prof. COSTER of Groningen that he should carry out such an investigation. The results of this work of COSTER and VAN DER ZIEL²⁾ were published some time ago; hence we have now returned to our investigations on these acids.

§ 2. The results of the measurements carried out by the above mentioned workers at room temperature of the long spacings of these acids are reproduced graphically in Fig. 1 as a function of the term-number³⁾. Beginning with *n.* hexylmalonic acid (term-number 6) the long spacing shows a very definite alternation. On passing up the series large and small increases of this constant alternate with one another and the former occur on passing from an odd to an even term; this alternation is thus *incomplete* and *even* according to the terminology introduced by VERKADE and COOPS⁴⁾. It is noteworthy that the terms with term-number 2—5 on the other hand show no alternation; they form a separate group and neither the series of higher even nor that of the higher odd terms forms a continuation of it. Methylmalonic acid (term-number 1) is left out of consideration here.

§ 3. Particulars of the method of preparation and purification of the acids, of the specimens of acids used and of our measurements of the heats of combustion will be published elsewhere.

Table 1 gives a résumé of the results obtained. The third column contains the isothermal heat of combustion at 19°.5 and constant volume, per gram, weighed in air with platinum weights. The fifth and sixth columns contain

¹⁾ Rec. trav. chim. **49**, 568 (1930).

²⁾ These Proceedings **35**, 91 (1932).

³⁾ Compare VERKADE and COOPS, loc. cit., p. 569.

⁴⁾ loc. cit., p. 570.

the molecular heats of combustion at the temperature given, at constant volume (Q_v) and at constant pressure (Q_p) respectively; these quantities

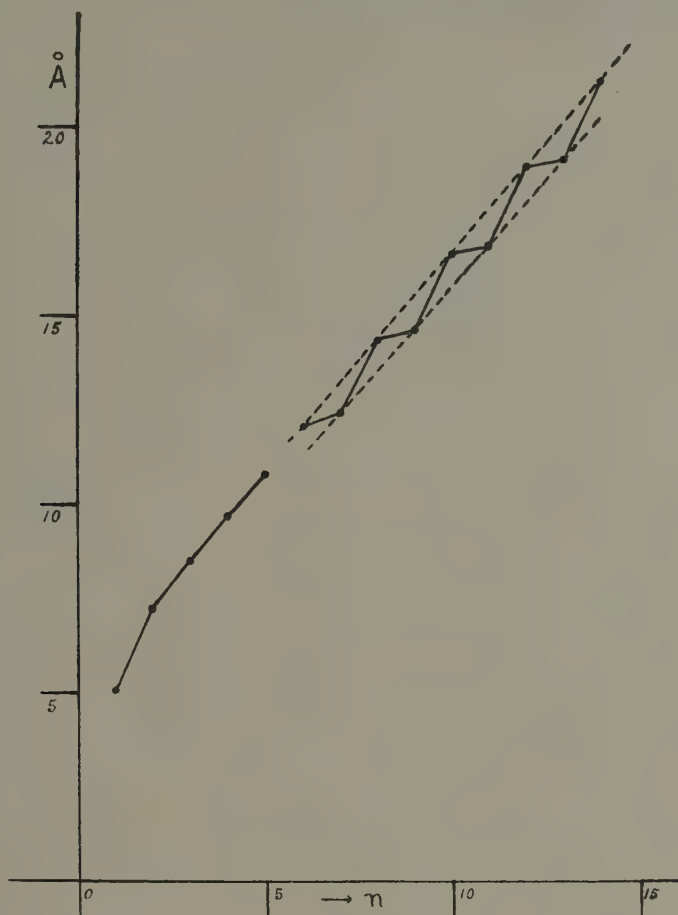


Fig. 1. Long spacings of n . monoalkylmalonic acids as a function of their term-number.

have been calculated with the aid of the specific gravities given in the fourth column.

The third column of Table 2 contains the values of Δ_{CH_2} , deduced from the values of Q_p , that is to say, the increase of this heat of combustion on regular increase of the term-number by 1 $\left(\frac{\Delta Q_p}{\Delta n} \right)$. The picture, which these values of Δ_{CH_2} show, must now be interpreted in such a way as to be in agreement with the above-mentioned results of COSTER and VAN DER ZIEL.

It has repeatedly been observed that some alternation becomes gradually less noticeable as the series is ascended. For example in the case of the solubility in water and the melting-point ⁸⁾ of the dicarboxylic acids of the

⁸⁾ FAIRWEATHER, Phil. Mag. 1, 944 (1926).

TABLE 1.

Term-number	R . CH(COOH) ₂	Heat of combustion per g (air) (19°.5; v const.)	Spec. grav.	Q _v	Q _p
0	malonic acid ⁶⁾	1991.3 cal ₁₅₀	1.62 ⁵⁾	207.0 Cal ₁₅₀	206.4 Cal ₁₅₀
1	R = methyl	—	1.45 ⁷⁾	—	—
2	ethyl	3930.3 "		518.6 "	518.6 "
3	n. propyl	4623.7 "		674.9 "	675.2 "
4	n. butyl	5186.5 "		829.6 "	830.2 "
5	n. amyl	5666.7 "		985.7 "	986.6 "
6	n. hexyl	6070.3 "	1.21 ⁵⁾	1140.9 "	1142.1 "
7	n. heptyl	6418.5 "	1.19 ⁵⁾	1296.2 "	1297.7 "
8	n. octyl	6719.3 "	1.17 ⁵⁾	1451.0 "	1452.8 "
9	n. nonyl	6984.3 "	1.16 ⁵⁾	1606.1 "	1608.1 "
10	n. decyl	7218.9 "	1.15 ⁵⁾	1761.4 "	1763.4 "
11	n. undecyl	7427.6 "	1.14 ⁵⁾	1916.0 "	1918.6 "
12	n. dodecyl	7613.4 "	1.13 ⁵⁾	2070.5 "	2073.4 "
13	n. tridecyl	7783.1 "		2225.6 "	2228.8 "
14	n. tetradecyl	7936.6 "		2380.6 "	2384.1 "

TABLE 2.

Term-number	Q _p	Δ _{CH₂}	Δ _{C₂H₄}	
			Even terms	Odd terms
0	206.4 Cal ₁₅₀	—		
1	—	—	312.2 Cal ₁₅₀	
2	518.6 "	—		
3	675.2 "	156.6 Cal ₁₅₀		
4	830.2 "	155.0 "	311.6 "	
5	986.6 "	156.4 "		311.4 Cal ₁₅₀
6	1142.1 "	(155.5) "		
7	1297.7 "	155.6 "		
8	1452.8 "	155.1 "	310.7 "	
9	1608.1 "	155.3 "		310.4 "
10	1763.4 "	155.3 "	310.6 "	
11	1918.6 "	155.2 "		310.5 "
12	2073.4 "	154.8 "	310.0 "	
13	2228.8 "	155.4 "		310.2 "
14	2384.1 "	155.3 "	310.7 "	

⁵⁾ BILTZ, FISCHER and WÜNNENBERG, Z. physik. Chem., A **151**, 25 (1930).

⁶⁾ VERKADE, HARTMAN and COOPS, Rec. trav. chim. **45**, 373 (1926).

⁷⁾ TANATAR and TSCHELEBIJEV, Journ. Russ. phys. chem. Ges. **22**, 549 (1890).

oxalic acid series this *damping* of the alternation soon becomes quite pronounced. Now we were originally of the opinion that in the case of the heats of combustion of the *n*. monoalkylmalonic acids we were dealing with such a damping of the alternation which set in quite low down in the series and soon became practically complete.

This hypothesis is nevertheless not tenable. Indeed, on the basis of what COSTER and VAN DER ZIEL brought to light with regard to the long spacings of these acids, the acids with term-number 5 and lower and those with term-number 6 and higher must be considered as quite separate groups. *In the group of the lower terms the heat of combustion shows an unmistakable, though somewhat weak odd alternation. In the group of the higher terms, the values of Δ_{CH_2} are on the other hand constant within the error of observation; no trace of an alternation of the heat of combustion can thus be detected.*

§ 4. In our previous communication it was shown that there exists a

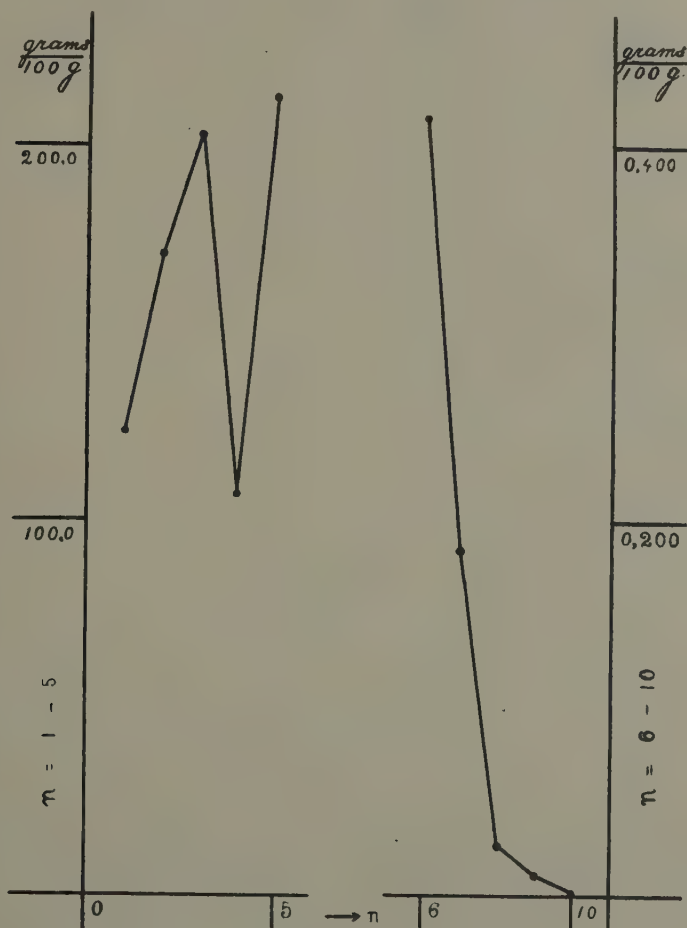


Fig. 2. Solubility of *n*. monoalkylmalonic acids in water as a function of their term-number.

quite remarkable contrast between the solubility in water at $25^{\circ}.0$ of the acids with term-number 2—5 and that of the higher acids (comp. Fig. 2). The work of COSTER and VAN DER ZIEL throws some light also on this noteworthy difference in behaviour between the lower and the higher terms of this series.

It is probably not an accidental coincidence that the solubility of these acids in benzene at $25^{\circ}.0$ shows a maximum just at *n.* amylmalonic acid (term-number 5). (See Fig. 3).



Fig. 3. Solubility of *n.* monoalkylmalonic acids in benzene as a function of their term-number.

COSTER and VAN DER ZIEL also draw attention to the melting-point curve (Fig. 4) which shows a minimum at the same term. It is however not at all certain a priori that all these acids retain the same crystal structure during heating from room temperature up to the melting-point and it is consequently dangerous to combine the long spacings found at room temperature with the melting-points.

§ 5. Although on the one hand the work of COSTER and VAN DER ZIEL has brought positive enlightenment, yet on the other hand the alternation

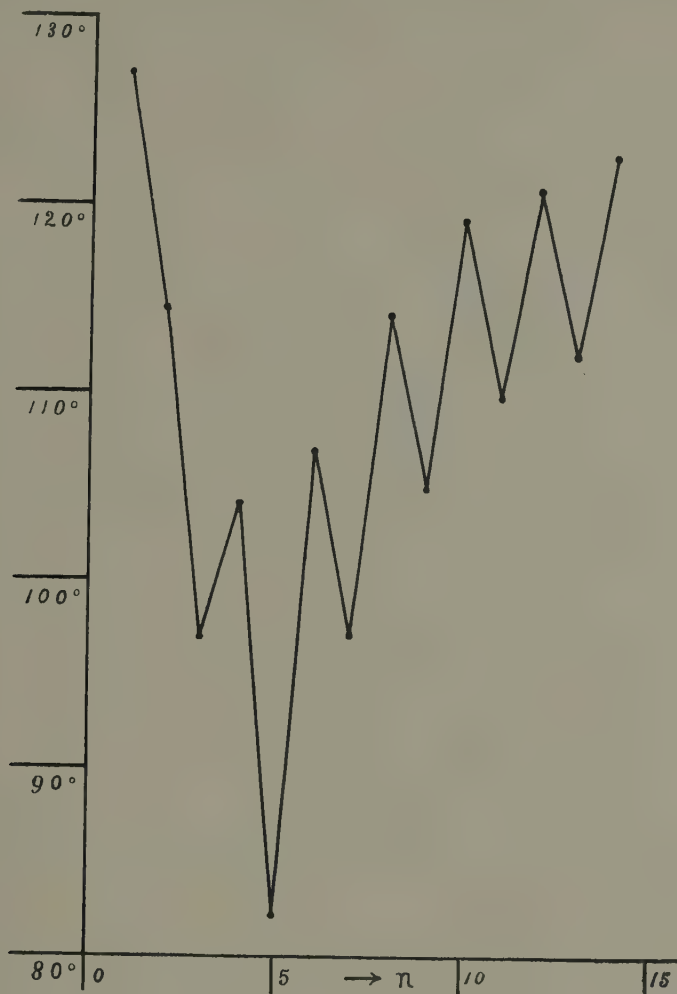


Fig. 4. Melting point of n . monoalkylmalonic acids as a function of their term-number.

phenomena occurring with these acids now appear to be more complicated than one would suppose a priori. In what follows we develop some further ideas about these phenomena.

a. In the small group of the lower acids an alternation of the long spacings is not observed. (See Table 3). As appears immediately from an examination of a model, *in the absence of such an alternation the zigzag chains of methylene groups must be perpendicular to the planes formed by the terminal groups*. If the value 1.54 \AA is taken for the diameter of the carbon atom and the tetrahedral angle $109^\circ 28'$ is retained in the chains, the length of a vertical zigzag chain will increase by 1.26 \AA per methylene

TABLE 3.

Acid	Long spacing	$\frac{\Delta d}{\Delta n}$
Ethylmalonic	7.25 Å	1.25 Å
<i>n.</i> propylmalonic	8.50 Å	1.21 Å
<i>n.</i> butylmalonic	9.71 Å	1.11 Å
<i>n.</i> amylmalonic	10.82 Å	

group. In a number of series with non-alternating long spacing the experimentally found increase is somewhat greater because, as is commonly assumed, the angle is somewhat greater than $109^{\circ} 28'$; examples of this are furnished by the ethyl esters of the fatty acids (MALKIN⁹), the normal primary alcohols (MALKIN¹⁰), the acid potassium salts of the fatty acids (PIPER¹¹), the ketones (SAVILLE and MÜLLER¹²), etc. The hypothesis does not seem to us to be too risky that *the members of the group of n. monoalkylmalonic acids in question possess a vertical chain*; the increase in length of the chain per methylene group (see Table 3) is in favour of this hypothesis.

This group of acids does meanwhile show an alternation of the solubility in water and in benzene at $25^{\circ}.0$, of the energy-content at $19^{\circ}.5$ and also of the melting-point. We consider this fact somewhat more closely in § 6; it is in our opinion definitely interesting in connection with the views of MALKIN on the cause of the alternation phenomena. The acids with the groups $-\text{CH}_3$ and $-\text{CH}(\text{COOH})_2$ in the *cis*-position with respect to the chain of methylene groups — on applying the terminology suggested by us, these are the even acids — have the relatively smaller energy-content, the smaller solubility in water and benzene and the higher melting-point.

b. The long spacings found for the group of the *higher* acids show a marked alternation (Fig. 1). *The zigzag chains of methylene groups are thus tilted with respect to the terminal planes.* From the data of COSTER and VAN DER ZIEL it can be calculated that the long spacing increases for each two methylene groups in the even acids by 2.26 Å on the average and in the odd acids by 2.21 Å on the average. The angle of tilt of the chains calculated from these data on the before-mentioned premises amounts to about $63\frac{1}{2}^{\circ}$ and about $61\frac{1}{2}^{\circ}$ respectively. We need not concern ourselves here with this possible difference in angle of tilt in the odd and even terms, which also occurs in other series.

Until now in this group of acids there has moreover been encountered

⁹) Journ. Chem. Soc. 1931, 2796.

¹⁰) Journ. Amer. Chem. Soc. **52**, 3739 (1930).

¹¹) Journ. Chem. Soc. 1929, 234.

¹²) Ibid, **127**, 591 (1925).

besides an alternation of the melting-point an alternation of the solubility in benzene at $25^{\circ}.0$ and of the molecular volume at $16-18^{\circ}5$). The acids with the groups $-\text{CH}_3$ and $-\text{CH}(\text{COOH})_2$ in the *cis*-position possess the relatively longer spacing, the relatively larger molecular volume and furthermore, as in the case of the group of lower acids, the smaller solubility in benzene and the higher melting-point. In other homologous series the picture presented by the sum total of the types of alternation in these constants can be different; in the dicarboxylic acids of the succinic acid series, for example, the acids with the relatively longer spacing — in this case the even acids with the $-\text{COOH}$ -groups in the *trans*-position¹³⁾ — have the relatively smaller molecular volume at $25^{\circ}14$), the smaller solubility in benzene at $25^{\circ}.0$ ¹⁵⁾ and the higher melting-point. A detailed knowledge of the crystal structures of the odd and even terms of a given homologous series will probably be able to contribute much to a better understanding of the type of each alternation phenomenon in this series and thereby of the connection between these phenomena. Little or nothing can at present be said on this question without falling into very speculative discussions. An indirect proof of this is furnished by the contents of the publication of MALKIN¹⁶⁾, presently to be discussed. *Conversely the knowledge of the alternation phenomena occurring in a homologous series will meanwhile perhaps be able sometimes to be of service in the interpretation of the results of crystallographic or röntgenographic investigation of this series.*

It is a curious fact that, on the other hand, no alternation whatever is observed in the solubility in water at $25^{\circ}.0$ and in the heat of combustion of these higher acids. The increase in the heat of combustion on passing from one even term to the next even term ($\Delta_{\text{C}_2\text{H}_4}$) amounts to 310.5 Cal_{150} on the average; in the odd acids this increase amounts to 310.4 Cal_{150} (see Table 2). The excellent constancy of $\Delta_{\text{C}_2\text{H}_4}$ leads one to a conclusion with regard to the *latent heats of fusion* of these acids which will be dealt with in a publication to appear elsewhere.

§ 6. As a result of their own work and of a critical survey of the literature VERKADE, COOPS and HARTMAN¹⁷⁾ were the first to express the conviction *that such alternation phenomena only occur in constants which are related to the crystalline state*. This conception was acknowledged straight away to be correct by other investigators of these phenomena. Only NEKRASSOV¹⁸⁾ — apparently unaware of the above

¹³⁾ TRILLAT, Comptes rendus, **180**, 1329 (1925); HENDERSON, Proc. Roy. Soc. Edin. **48**, 20 (1927—1928).

¹⁴⁾ BILTZ and BALZ, Z. anorg. Chem. **170**, 335 (1928).

¹⁵⁾ VERKADE and COOPS, Rec. trav. chim. **49**, 578 (1930).

¹⁶⁾ Nature, **127**, 126 (1931); Journ. Chem. Soc. 1931, 2796.

¹⁷⁾ Rec. trav. chim. **45**, 585 (1926).

¹⁸⁾ Z. physik. Chem. **128**, 203 (1927).

mentioned paper — still in 1927 illustrated his interesting views with the aid of — pretended — alternations in series of *liquid* homologues. In a private conversation with one of us (VERKADE) in July 1928 SCHILOW, under whose supervision NEKRASSOV worked, frankly acknowledged the correctness of the former's conception.

The results of the work on monomolecular layers of long chain compounds and of the X-ray investigation of such crystalline substances have soon afterwards led to somewhat more profound theories concerning the cause of the alternation phenomena. They showed that with regular increase of the term-number of a series of crystalline homologues the terminal groups are alternately in the *cis* and the *trans* position with respect to the zigzag chains of methylene groups. *Some workers now see in this fact the cause of the alternation phenomena.* Besides the work of NEKRASSOV¹⁸⁾ that of MÜLLER¹⁹⁾ must be cited; reference may also be made to the paper of PAULY²⁰⁾ which bears evidence of a prophetic insight. It is not necessary for our purpose to discuss the relevant literature here.

Some time ago a different conception with regard to the cause of these phenomena was put forward by MALKIN¹⁶⁾. The view above mentioned demands in principle the occurrence of alternation phenomena in all the terms of all homologous series. MALKIN sees a difficulty in this, since, according to him, series exist which show no alternation phenomena; he mentions as such, without any illustration, the normal paraffins, the methyl ketones, the normal primary alcohols and the ethyl esters of the fatty acids. These series are those, in which vertical chains have been observed (see § 5). *According to MALKIN it is now a characteristic of a series with alternation phenomena that it possesses a tilted chain, while a vertical chain should be present in a series without alternation phenomena.* That is to say "alternation is caused by some effect resulting from a tilted chain"; the supposed nature of this effect is then indicated.

We would now make some remarks with regard to this conception of MALKIN:

10. The long spacing increasing by an amount of about 1.3 Å per methylene group, from which one concludes that the compounds possess a vertical chain, was met with in the X-ray investigation of the *higher* terms of the series mentioned by MALKIN. For example, the term-number of the terms in question of the series of ethyl esters of the fatty acids amounted to 17—21⁹⁾ and with the alcohols it lay between 12 and 25¹⁰⁾, with the paraffins²¹⁾ between 17 and 35. Is now absence of an alternation of the long spacing in the affected forms of these high terms attended by the absolute absence of alternation in other physical constants which also relate to the crystalline state? MALKIN may have made such a connection

¹⁹⁾ Proc. Roy. Soc. London, A **124**, 317 (1929).

²⁰⁾ Z. anorg. Chem. **119**, 271 (1922).

²¹⁾ MÜLLER and SAVILLE, Journ. Chem. Soc. **127**, 599 (1925).

the starting-point of his deductions, it has not in the least been proved; he himself even makes no attempt in this direction. Precision measurements of constants of these high terms suitable for settling the existence or non-existence of this connection were, as far as we know, not available in the literature and have not been carried out by MALKIN.

A careful investigation dealing with several physical constants for the purpose of answering the question put forward above seems to us to be of quite definite importance.

20. MALKIN's statement that no alternation phenomena occur in the above mentioned homologous series is incorrect and is most probably a consequence of careless editing of his paper with regard to this point. For example, the lower paraffins show an alternation of the zero-point volume ("Nulpunktsvolumen")²²⁾ and the alcohols up to and including term-number 11 a definite melting-point alternation²³⁾; FRANCIS, PIPER and MALKIN²⁴⁾ found a clearly alternating long spacing in that form of the ethyl esters of the fatty acids which is stable below the transition point. It can however be conceded that data available in the literature, mostly however not at all accurate, concerning the *melting-points* of the *higher* terms of these series strongly suggest the absence of an alternation in this constant. Very probably this fact merely has been in MALKIN's thoughts and is the actual and as yet rather uncertain basis of his arguments.

One cannot however in any way draw the conclusion from the absence of alternation in a single constant that alternation phenomena are entirely absent in the homologous series in question. Indeed it appears for example from our investigation of the group of the *higher* monoalkylmalonic acids that in this case some constants show a definite alternation, others on the contrary no noticeable alternation.

30. Neither MALKIN nor MÜLLER mention a single word about *the possibility that the dimensions of the cross-section of the molecule are different in the case of cis- or trans-position of the terminal groups*. Such a possibility appears to us to be in every way conceivable. One could then expect that the dimensions of the cross-section alternate in the homologous series. It needs no further exposition that in such an alternation in the density of packing of the chains may lie a source of alternation in other physical constants (molecular volume, melting-point, etc.), even if the odd and even terms of the series in question possess a vertical chain.

It is definitely of interest to refer in this connection to the values reproduced in Table 4 of short spacings d_3 and d_4 found by HENDERSON²⁵⁾ in an X-ray investigation of odd and even terms of the succinic acid series. These short spacings show a definite alternation. It must however be

²²⁾ BILTZ, FISCHER and WÜNNENBERG, loc. cit.; HEUSE, Z. physik. Chem., **147**, 266 (1930).

²³⁾ VERKADE and COOPS, Unpublished observations.

²⁴⁾ Proc. Roy. Soc. London, A **128**, 224 (1930).

²⁵⁾ Proc. Roy. Soc. Edin., **48**, 20 (1927—1928).

remarked that it is not certain whether these spacings are really connected with the cross-section of the molecule.

40. In § 5 it was demonstrated that the members of the group of *lower n*. monoalkylmalonic acids most probably possess a vertical chain. *In conflict with MALKIN's conception, a definite alternation has now been observed here in the solubility in water and in benzene at 25°.0, in the energy-content at 19°.5 and also in the melting-point.* It appears highly improbable to us that these alternations are to be attributed to a difference in the density of packing of the chains in the *cis*- and *trans*-acids. Investigation of a model shows immediately that this possibility can be safely left out of consideration, if one of the two terminal groups is a methyl group; thus, for example, in the acids in question and in the homologous series mentioned by MALKIN.

TABLE 4.

Term-number	d_3		d_4	
	even	odd	even	odd
5		3.78 Å		3.38 Å
6	3.65 Å		2.98 Å	
7		3.87		3.28
8	3.75		2.99	
10	3.77		2.98	
11		3.93		3.21
12	3.71		2.97	

It may here be mentioned that HENDERSON ²⁵⁾ found no contrast between the short spacings observed with ethyl- and *n*. butylmalonic acid on the one hand and *n*. propylmalonic acid on the other.

50. An explanation for the alternation phenomena in these acids might also be sought in the hypothesis that in the case of such low term-numbers the two terminal groups of the molecule still exert a powerful influence upon one another and to a different extent in the *cis*-position than in the *trans*-position. However, such an explanation seems to us to be unacceptable, partly because one of the terminal groups is a so little reactive, non-polar methyl group, partly because of the fact that in this case also the long spacings ought to show alternation.

60. *In our opinion these alternation phenomena occurring in the lower monoalkylmalonic acids definitely make still more improbable the already insufficiently experimentally founded views of MALKIN.* MALKIN's ideas are too naive; they cannot in any way embrace the very complicated whole of

these phenomena. This appears once more when we subject to a critical examination that part of MALKIN's paper in which he discusses the alternation phenomena occurring in homologous series with tilted chains and states to what cause in his opinion these are to be attributed. As a consequence of his views on the subject — reference may be made to the original paper for these — MALKIN deduces certain rules with regard to the connection between the types of alternation occurring in various physical constants. The *odd* terms — we will not yet go into the question of what MALKIN understands by this — should possess the lower melting-point, the larger spacing and the less tilted chain. If MALKIN's views were correct, these rules ought to possess a quite general validity. However, there is no question of this. Already the series of higher alkyl iodides investigated by MALKIN⁹⁾ himself furnishes a clear exception: the *odd* terms here have the higher melting-point and the shorter spacing. As follows from what has been stated in the preceding § the monoalkylmalonic acids and the dicarboxylic acids of the succinic acid series for example do no more satisfy these rules.

The properties of the odd and even terms of a homologous series are to a preponderating degree determined by the nature of the two terminal groups; these latter are therefore also of influence on the alternation phenomena occurring in this series. This is an obvious fact which cannot be tampered with. It is now just the fault of ideas such as those of MALKIN and also of those of MÜLLER¹⁹⁾ that the nature of these terminal groups is completely left out of the argument.

70. Finally it may incidentally be remarked that it is certainly quite wrong, as MALKIN does, — at least we believe that we are justified in deducing this from his paper; it is nowhere stated expressly — to consider the physical properties as functions of the *total number of carbon atoms* in the molecule, inclusive thus of those of the terminal groups. The application of a system of numbering the successive terms such as that suggested by NEKRASSOV¹⁸⁾ or by VERKADE and COOPS³⁾ appears to us to be so much more rational.

Rotterdam, Laboratory of the Dutch Commercial University,
Dec. 1932.

Palaeontology. — On *Paralegoceras sundaicum* HANIEL and related forms.
By F. A. H. W. DE MAREZ OYENS. (Communicated by Prof. H. A. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

§ 1. *Paralegoceras sundaicum* has been established by HANIEL in his monograph on the Permian cephalopods of Timor (Bibl. 4). He examined a great number of specimens of very variable aspect, but could not see his way to class them in different species.

In his report on the Permian cephalopod material of Dr. JONKER's collection, also from Timor, SMITH divided the species of HANIEL into six different species (Bibl. 9), claiming "that these forms are differentiated almost down to the early adolescent stages, and do not intergrade after that time. We have here a group of nearly related species that have diverged only a little while back, and still preserve a great deal of their common ancestral characters" (Bibl. 9, p. 35).

The object of this paper is to prove the incorrectness of the said division, the transition of the forms established by SMITH being within the limits of normal variability.

The six forms described by SMITH are :

1. *Paralegoceras evolutum* SMITH,
2. " *sundaicum* HANIEL,
3. " *gigas* SMITH,
4. " *wanneri* SMITH,
5. " *tschernyschewi* KARPINSKY,
6. " *australe* SMITH.¹⁾

They correspond in the following details :

a. They all have the same number (13) of external and internal lobes and saddles according to the formula $MELU_2U_4U_3U_1I$.

The typical forms of *Paralegoceras* from the Carboniferous having eleven and *Schistoceras* having fifteen lobes and saddles, SMITH remarks that "either one of these genera must be stretched to include these new forms, or else a new genus or subgenus must be established" (Bibl. 9, p. 30).

HANIEL and WEDEKIND (Bibl. 11, p. 161) followed the first course, HANIEL including the forms in *Paralegoceras*, WEDEKIND in *Schistoceras*.

Recently however SCHINDEWOLF (Bibl. 8, p. 119) has opted for the establishment of a new genus *Metalegoceras*. Though admitting the correctness of this point of view, the old name of *Paralegoceras* is used throughout in this paper, in order not to create confusion in citing SMITH and HANIEL.

¹⁾ The sequence in which these forms are enumerated here is not arbitrary, but in the order of decreasing proportion between *U* and *D* (See fig. 1, page 89).

b. The lobes are narrow pointed, the saddles rounded, the septa, as a whole, being identical for the whole group.

c. The general form of the shell is robust, the whorls being rounded to elliptical.

d. The surface of the shell is smooth, except for very fine growth lines, (which curve slightly backward on the external side) and extremely fine spiral lines on the first volutions.

According to SMITH the specific characteristics in which the six species differ are the following :

a. The proportion between the width of the umbilicus and the total diameter $= U : D$ (See fig. 1).

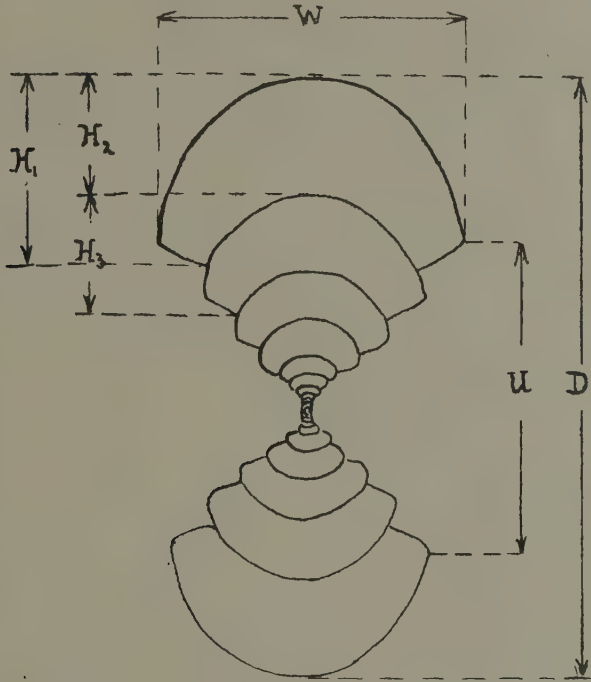


Fig. 1.

b. The proportion between the height of the last whorl and the total diameter $= H_1 : D$.

c. The proportion between the width of the last whorl and the height of the same $= W : H_1$.

d. The proportion between the part of the inner whorl embraced by the outer whorl and the total inner whorl $= (H_1 - H_2) : H_3$.

e. The proportion between the part of the outer whorl embracing the inner whorl and the total outer whorl $= (H_1 - H_2) : H_1$.

f. The occurrence of constrictions at maturity.

Tabulating the cyphers which SMITH gives in various places of the mentioned proportions, it is noted that some of them are not very cha-

TABLE 1

	Prop. a	Prop. b	Prop. c	Prop. d	Prop. e
<i>evolutum</i>	greater than $\frac{1}{4}$	$\frac{12}{3}$	slightly more than $\frac{1}{2}$	about $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
<i>sundaicum</i>	slightly gr. than $\frac{1}{3}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	slightly greater than $\frac{1}{3}$
<i>gigas</i>	" " " $\frac{1}{3}$	about $\frac{11}{5}$	about $\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	slightly greater than $\frac{1}{3}$
<i>wanneri</i>	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{3}{5}$	nearly $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
<i>tschernyschewi</i>	slightly less than $\frac{1}{2}$	slightly gr. than 1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	slightly less than $\frac{1}{3}$
<i>australe</i>	nearly $\frac{1}{2}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	about $\frac{1}{5}$

racteristic, either placing greatly differentiating forms nearly together or showing in general only small variations. Proportion a is by far the most characteristic, giving the umbilical habitus.

§ 2. Seventy-seven specimens of *Paralegoceras sundaicum*, for the most part from the locality Bitauai, have been measured (including the six type specimens of SMITH and the 17 specimens of HANIEL (Bibl. 4, p. 58 and 62)); the proportions $\frac{U}{D}$, $\frac{H_1}{D}$ and $\frac{W}{H_1}$ have been calculated and the results are grouped in Table 2¹⁾. The proportions $\frac{H_1-H_2}{H_3}$ and $\frac{H_1-H_2}{H_1}$ have in some instances also been given. (See Tables 5 and following).

Based on the thesis of WEDEKIND (Bibl. 10) that modern biological researchmethods can be applied to a certain extent to palaeontological material, especially in fixing rational limits to species and varieties, and encouraged by the splendid results obtained by BRINKMANN (Bibl. 1), VON BUBNOFF (Bibl. 2), KLÄHN (Bibl. 7) and others, these methods have been applied to the material in question.

The arithmetical mean and the standard deviation (mean square) have been calculated for the proportions $\frac{U}{D}$, $\frac{H_1}{D}$ and $\frac{W}{H_1}$ on all the individuals with a diameter larger than 35 mm, the formulas of JOHANNSEN (Bibl. 5) having been used. It will be explained further on, why the individuals smaller than 35 mm have not been taken into consideration.

The proportion $\frac{U}{D}$ has been divided into classes with an increase of 0.05, the proportion $\frac{H_1}{D}$ with an increase of 0.02 and $\frac{W}{H_1}$ with an increase of 0.1.

¹⁾ See annex.

TABLE 2 (Continued)

Dimensions in mm

	<i>D</i>	<i>U</i>	<i>H</i> ₁	<i>H</i> ₂	<i>W</i>	$\frac{U}{D}$	$\frac{H_1}{D}$	$\frac{W}{H_1}$			
49	91.5	34.25	32.5	18	± 42	.37	.36	1.3	OWN	measurements	N ^o . 22 (Table 11)
50	78	28.5	32	26	42	.37	.41	1.3	"	"	" 43
G 51	163	60.5	65.5		84	.37	.40	1.3	"	"	" 3
G 52	117.5	44	± 43		± 61	.37	.37	1.4	"	"	" 4
G 53	175	65	65	39	78	.37	.37	1.2	"	"	" 51
54	115	42	38	22.5	54	.37	.33	1.4	"	"	" 37
55	71	26	25.5		39	.36	.36	1.5	HANIELS	" p. 58	" 10
G 56	24.5	8.5	10	6	15	.35	.41	1.5	OWN	"	" 16
57	110	37	38	27	63	.34	.35	1.7	SMITHS	" p. 38 (wanneri)	
58	31	10.5	12	± 6.5	18.5	.34	.39	1.5	OWN	"	N ^o . 30
59	23.25	7	10	5	15.5	.34	.43	1.5	"	"	" 31
60	67	23	27	17	34	.34	.40	1.3	"	"	" 32
61	40	13.5	16	8	20	.34	.40	1.2	"	"	" 48
62	103	35	40	21	47	.34	.39	1.2	"	"	" 52
63	65	21.5	26		33	.33	.40	1.3	HANIELS	"	" 9
64	27.75	9	13.25	6.5	18	.32	.48	1.4	OWN	"	" 19 (Table 12)
65	84	26	39	22	45	.31	.46	1.2	SMITHS	" p. 37 (tschernyschewi)	
66	49	15	20	11	28	.31	.41	1.4	OWN	"	N ^o . 47
G 67	36.5	11	15		21.5	.30	.41	1.4	"	"	" 17
68	30	9	13		18.5	.30	.43	1.4	HANIELS	" p. 58	" 8
69	64	19	25	18	29	.30	.39	1.2	OWN	"	" 56
G 70	54	16	21	7.5	32	.30	.39	1.5	"	"	" 57
71	26	7.5	10.5		16	.29	.40	1.5	"	"	" 14
72	29	8.5	12.5	7	18.5	.29	.43	1.5	"	"	" 29
73	38	11.	16	8.5	22.5	.28	.42	1.4	"	"	" 49 (Table 13)
74	45.5	12.25	17.5		26.5	.27	.38	1.6	"	"	" 15
75	41	11	17		24	.27	.41	1.4	"	"	" 1
76	24	5.5	12		15	.23	.50	1.2	HANIELS	"	" 7
77	80	18	37	19	46	.22 ²	.46	1.2	SMITHS	" p. 31 (australe)	

REMARKS.

1. The individuals marked C have constrictions. Those to which HANIEL's measurements refer could not be retraced; it is therefore impossible to state whether or not they have constrictions.
2. The majority of HANIEL's individuals are probably from the locality Bitauai.
3. The six type individuals of SMITH are from the same horizon in Bitauai and Noil Simaam.
4. The numbers 22, 34 and 49 are from Hatu Dame in Portuguese Timor (Collection Bonn).
5. Number 70 is from Nefo Tassi (Dutch Timor).
6. The remaining numbers (50 in total) are from Bitauai (Collection JONKER).
7. Whenever ± appears before a cypher it indicates that the state of preservation did not permit an absolutely accurate measurement.
8. The numbers 56 and 75 were originally labelled by SMITH as being P. "wanneri", number 64 as "tschernyschewi" and the numbers 67, 71 and 74 as "australe".
9. The measurements have been made by kind permission of Prof. Dr. H. A. BROUWER of Amsterdam. The writer is also indebted to Prof. Dr. J. WANNER of Bonn and Prof. Dr. H. GERTH of Amsterdam for assistance and advice and also to the former for giving him specimens from Portuguese Timor.

TABLE 2
Dimensions in mm

	D	U	H_1	H_2	W	$\frac{U}{D}$	$\frac{H_1}{D}$	$\frac{W}{H_1}$	
1	31.5	25	75		20.5	.80	.24	2.7	HANIELS measurement p. 58 N ^o . 1
2	49	31	11.25	± 7.5	27	.63	.28	2.4	OWN " " 40
3	76	47	21		45	.62	.28	2.1	HANIELS " " 5
4	57	35	15	9.5	31	.61	.26	2.1	OWN " " 33
5	45.5	26.5	14		28.5	.58	.31	2.0	HANIELS " " 2
6	55	32	15		32	.58	.27	2.1	" " " 3
G 7	34.5	19.5	8	6	19.5	.57	.23	2.4	OWN " " 35
8	58	33	16.5	± 10	34	.57	.28	2.1	" " " 45
9	80	45	24		45	.56	.30	1.9	HANIELS " " 5
10	52.5	29.5	14	10	30	.56	.27	2.1	OWN " " 27
11	87	47	26	14	48	.54	.30	1.8	" " " 54
12	84	43	± 25		± 50	.51	.30	2.0	" " " 7
13	125	64	37		67	.51	.30	1.8	HANIELS " " 6
14	101.5	51	29.25		54	.50	.29	1.8	OWN " " 9
15	81	41	25	16	41	.50	.30	1.6	HANIELS figure 18 p. 62 (Table 6)
16	53	26.5	16	8	28	.50	.30	1.7	OWN measurement N ^o . 55
17	114	57	40	26	65	.50	.35	1.6	SMITHS " p. 33 (evolutum)
18	77	38	22.5	± 15	38	.49	.35	1.7	OWN " N ^o . 44
19	101	48	32	± 20	± 50	.48	.32	1.6	" " " 41
20	40	19	12.5		± 22	.47	.31	1.8	" " " 2
21	29.5	14	9	± 7	20	.47	.31	2.2	" " " 46
22	82.25	37.75	30	17.5	46	.46	.36	1.5	" " " 20
23	29	13.5	10.5		18	.46	.36	1.7	HANIELS " p. 58 " 11
24	74	34	20.5	14	36	.46	.28	1.8	OWN " " 42
25	168	76	57		86	.45	.34	1.5	" " " 10
26	46.5	21	13	8	14.5	.45	.28	1.1	" " " 50
27	40	18	14		24.5	.45	.35	1.7	HANIELS " " 12
G 28	182	81	70	35	84	.44	.38	1.2	OWN " " 53
29	123.5	55	42.5	23.5	65	.44	.34	1.5	" " " 6 (Table 5)
30	90	40	33		49	.44	.37	1.5	HANIELS " " 13
31	120	52	43		60	.43	.36	1.4	" " " 15
32	21	9	7.5	4.5	13	.43	.36	1.8	OWN " " 21
G 33	130	55.5	48	29	64	.43	.37	1.3	" " " 18 (Table 8)
34	92.25	39	35	20.25	± 56	.42	.38	1.6	" " " 23 (Table 7)
35	152.5	63.5	53.5	32	± 60	.42	.41	1.1	" " " 39
36	210	87	78		96	.41	.37	1.2	HANIELS " p. 58 " 16
37	68	27	24.5	14.5	34.5	.40	.36	1.4	OWN " " 28
38	112.5	45	41.5		55	.40	.40	1.3	HANIELS " " 14
G 39	135.5	54	47	27	± 64	.40	.35	1.4	OWN " " 34
G 40	68	27	24	12.5	35	.40	.35	1.5	" " " 36
41	96.5	38	35		49	.39	.36	1.4	" " " 13
42	97.5	38	± 31		± 52	.39	.32	1.7	" " " 5
G 43	80	31	30.5	16.5	± 40	.39	.38	1.3	" " " 24 (Table 9)
44	75	29	28		40.5	.39	.38	1.4	" " " 12
45	89.5	34	33	18.5	47	.38	.37	1.4	" " " 11 (Table 10)
46	136	51	50	30	61	.38	.37	1.2	SMITHS " p. 36 (sundaicum)
G 47	113	43	± 41	± 23	54	.38	.36	1.3	OWN " N ^o . 38
G 48	157	58	58	40	70	.37	.37	1.2	SMITHS " p. 34 (gigas)

Calculation of M (arithmetical mean) and σ (standard deviation)

for the proportion $\frac{U}{D}$.

The material has been divided into the following classes :

Classes	0.675—0.625	0.625—0.575	0.575—0.525	0.525—0.475	0.475—0.425	0.425—0.375	0.375—0.325	0.325—0.275	0.275—0.225	0.225—0.175	
Average of class	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20	
Number of individuals in each class	1	4	4	8	11	14	13	6	2	1	= 64

Distance from class 0.40 Expressed in classes = a	0	1	2	3	4	5	
Number of individuals = p	14	11 13	8 6	4 2	4 1	1	} = 64 = n
Balance	14	-2	2	2	3	1	
Sum = Σpa	14×0	-2×1	2×2	2×3	3×4	1×5	= 25

$$\Sigma pa = 25 \quad ; \quad b = \frac{\Sigma pa}{n} = \frac{25}{64}.$$

Each class difference being 0.05, $M = 0.40 + 0.05 b = 0.4195$.

Squares of a	0	1	4	9	16	25	
Number of individuals = p	14	11+13	8+6	4+2	4+1	1	= 64 = n
Sum = Σpa^2	14×0	24×1	14×4	6×9	5×16	1×25	= 239

$$\Sigma pa^2 = 239 ; b^2 = 0.1526.$$

Thus $\sigma = \pm 0.05 \sqrt{\frac{\Sigma pa^2}{n} - b^2} = 0.0833 = 0.0935$ (0.0833 is SHEPPARDS correction, which takes into consideration the fact that the number of individuals is not evenly divided within each class. See Bibl. 5, p. 74.)

With this $M=0.4195$ and $\sigma=0.0935$ the ideal number of individuals that should occur in each class out of a total of 10,000 individuals can be calculated as follows: (see Bibl. 5).

Class limit	Distance from M	$\frac{D}{\sigma}$	Theoretical number of individuals		Theor. number reduced to total of 64	Actual number found in each class	Actual number found per 10,000
			Total up to limit of class	In each class			
0.675	+0.2555	2.733	$4965 + 1 \times 3.3 = 4968$	(32)			
0.625	+0.2055	2.198	$4842 + 4 \times 4.8 = 4861$	107	$0.68 = 1$	1	156
0.575	+0.1555	1.663	$4505 + 10 \times 1.3 = 4518$	343	$2.20 = 2$	4	625
0.525	+0.1055	1.129	$3643 + 21 \times 2.9 = 3704$	814	$5.21 = 5$	4	625
0.475	+0.0555	0.594	$2088 + 34 \times 4.4 = 2238$	1466	$9.38 = 9$	8	1250
0.425	+0.0055	0.059	$199 + 40 \times 0.9 = 235$	2003	$12.82 = 13$	11	1719
0.4195	0	—		2065	$13.22 = 13$	14	2188
0.375	-0.0445	0.476	$1736 + 36 \times 2.6 = 1830$	1609	$10.30 = 10$	13	2031
0.325	-0.0945	1.011	$3413 + 24 \times 1.1 = 3439$	948	$6.07 = 6$	6	937
0.275	-0.1445	1.546	$4332 + 12 \times 4.6 = 4387$	426	$2.73 = 3$	2	312
0.225	-0.1945	2.080	$4798 + 5 \times 3 = 4813$	142	$0.91 = 1$	1	156
0.175	-0.2445	2.615	$4953 + 1 \times 1.5 = 4955$	(45)			

Fig. 2 is a graph of the above calculation, the dotted line representing the ideal curve and the blocks giving, on the same scale, the actual number of individuals found in each class.

In spite of the fact, that all kinds of individual development stages (except larval) are mixed in the population, and that no complete certainty exists about the stratigraphical homogeneity of the material, the ideal and the actual numbers coincide rather well and it can be stated, that the variability of the index $\frac{U}{D}$ is almost equal to the variability that should prevail within one single species. This fact alone, however, cannot be considered as a 100 % proof that the population examined necessarily belongs to one species. The only thing that can be said is that the variability of $\frac{U}{D}$ is very gradual and well within the limits of normalcy.

The same remarks hold good for the proportions $\frac{H_1}{D}$ and $\frac{W}{H_1}$, the curve for the $\frac{W}{H_1}$ index being however rather slanting.

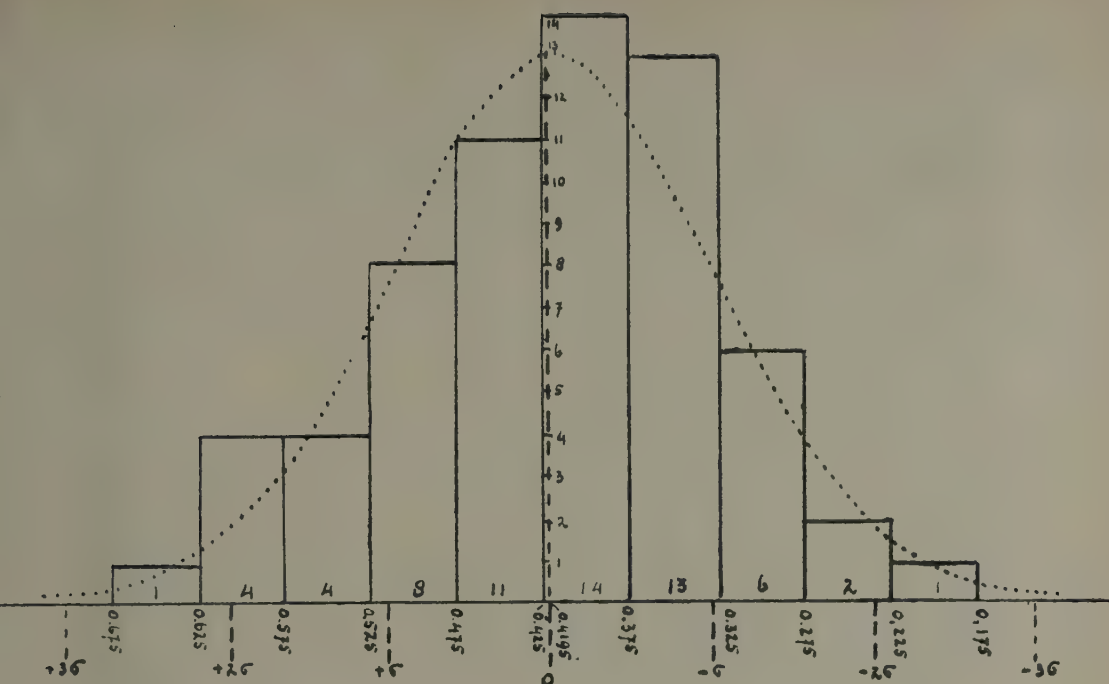


Fig. 2.

TABLE 3. U/D

	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20
0.26—0.27		2	1							3
0.28—0.29	1	1	1	1	2					6
0.30—0.31		1	2	4	1					8
0.32—0.33				1		1	1			3
0.34—0.35				2	3	2	1			8
0.36—0.37					4	6	5			15
0.38—0.39					1	3	1	2	1	8
0.40—0.41						2	5	2	1	10
0.42—0.43								1		1
0.44—0.45										
0.46								1	1	2
	1	1	4	8	11	14	13	6	2	1

H_1/D

TABLE 4. U/D

	.65	.60	.55	.50	.45	.40	.35	.30	.25	.20
2.4	1									1
2.3										0
2.2										0
2.1		3	2							5
2.0		1		1						2
1.9			1							1
1.8			1	2	2					5
1.7				2	1	1	1			5
1.6				3		1			1	5
1.5					4	1	1	1		7
1.4					1	5	2	3	1	12
1.3					1	3	5			9
1.2					1	2	4	2		1
1.1					1	1				2
	1	4	4	8	11	14	13	6	2	1

W/H_1

Furthermore an interesting correlation is to be noted between the proportions $\frac{U}{D}$ and $\frac{H_1}{D}$ and between $\frac{U}{D}$ and $\frac{W}{H_1}$, as illustrated in tables 3 and 4.

The former however is only a logical proof of correct measurement, since there is a close relation between $H_1 + U$ on one side and D on the other.

The second correlation shows that usually the evolute forms have broader whorls than the involute.

§ 3. Before drawing conclusions from the above mentioned facts, attention must be drawn to the ontogenetic development of different individuals.

The ontogenetic development has been studied by making cross sections (See fig. 3—5), so that the five concerned dimensions (D, U, H_1, H_2, W) could be taken from the same individual at different stages of development (ages) by imagining each time half a whorl cut off.

The results of these measurements are compiled in the following tables, together with the characteristic proportions.

Individual N ^o . 29 Bitauni		Fig. 4			TABLE V Dimensions in mm				
D	U	H_1	H_2	W	$\frac{U}{D}$	$\frac{H_1}{D}$	$\frac{W}{H_1}$	$\frac{H_1-H_2}{H_3}$	$\frac{H_1-H_2}{H_1}$
123.5	55	42.5	24	65	.45	.34	1.5	.66	.43
99.5	44	35	20.5	53	.44	.35	1.5	.66	.41
79	35	28.25	16.5	44	.44	.36	1.6	.69	.42
62.5	27	22	13	35.5	.43	.35	1.6	.67	.41
49.5	21.75	17.5	10	29	.44	.36	1.7	.71	.43
39.5	17	13.5	8	23.5	.43	.34	1.7	.71	.41
31.5	14.25	10.5	6.5	19.5	.45	.33	1.9	.75	.38
25	13	7.75	5	16	.52	.31	2.1	.73	.35
20	11.25	5.25	3.5	12.75	.56	.26	2.4	.63	.30
16.5	10.75	3.75	3	10.25	.65	.23	2.7	.33	.20
13.5	9	2.75	2.5	8	.67	.2	2.9	.14	.10
11	8	2.25	2	6.5	.73	.2	2.9		
9	7.25			5	.80				

(See for tables 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 the attached pages.)

The first striking feature on examining these tables is that all individuals begin life as evolute forms in the *Gastrioceras* stage. Soon however two different forms of development can be noted during growth. In the first group (ind. 15, 29, 34) the $\frac{U}{D}$ index decreases

Individual N^o. 15
(HANIEL's fig. 18, p. 62)

D	U	H ₁	H ₂	W	$\frac{U}{D}$	$\frac{H_1}{D}$	$\frac{W}{H_1}$	$\frac{H_1-H_2}{H_3}$	$\frac{H_1-H_2}{H_1}$
81	41	25	16	41	.51	.31	1.6	.56	.36
65	33.5	20	13.5	35	.52	.31	1.7	.51	.32
51.5	27	16	10.5	30	.52	.31	1.9	.52	.34
41	21.5	12.75	7.5	25	.52	.31	1.9	.62	.41
33.5	18	10.5	6.5	21	.54	.31	2	.60	.40
27	15.5	8.5	5.5	17.5	.57	.31	2.1	.60	.35
21.5	12.5	6.75	5	14	.58	.31	2.1	.50	.26
16.5	10	5	3.5	11	.60	.30	2.2		.30
13	8	3.5		8	.62	.27	2.3		

Individual N^o. 33
Bitauni

D	U	H ₁	H ₂	W	$\frac{U}{D}$	$\frac{H_1}{D}$	$\frac{W}{H_1}$	$\frac{H_1-H_2}{H_3}$	$\frac{H_1-H_2}{H_1}$	Ind. with constrictions
130	55.5	48	29	64	.43	.37	1.3	.63	.40	adult evolute tendency
101	41	36.25	21	50	.41	.36	1.4	.61	.42	adult "Sundaicum" Stage
80	28	30	17	41	.35	.37	1.4	.65	.43	
63	20.25	25	14	33.5	.32	.40	1.3	.69	.44	"wanneri" stage
49	15	20	11	27	.31	.40	1.3	.70	.45	
38	10	16	9.5	22	.26	.42	1.4	.68	.40	"australe" stage
28.5	6.75	13	7.5	17	.24	.46	1.3	.84	.42	
21	5	9.5	5.5	13.75	.23	.45	1.5	.90	.42	
15.5	4	6.4	4.25	10.5	.26	.42	1.6	.75	.35	"wanneri" stage
11.25	3.5	4.5	3.25	7.25	.31	.40	1.6	.63	.30	Larval evolute stage
8	3.5	3	2	6	.44	.37	2		.33	
6	3	2		4	.50	.33	2			

Fig. 3

D	U	H ₁	H ₂	W	$\frac{U}{D}$	$\frac{H_1}{D}$	$\frac{W}{H_1}$	$\frac{H_1-H_2}{H_3}$	$\frac{H_1-H_2}{H_1}$
80	31	30.5	16.5	±40	.39	.38	1.3	.70	.46
63.5	23	24	13.5	32	.36	.38	1.3	.67	.44
50	16	20	11.25	26	.32	.40	1.3	.70	.44
38.75	11	16	9.25	21.5	.28	.41	1.3	.69	.42
29.5	8	12.5	7.5	17.5	.27	.42	1.4	.71	.40
22	6	9.75	5.75	13.5	.27	.44	1.4	.80	.41
16.25	5	7	4.25	10.5	.31	.43	1.5	.79	.39
12	4.25	5	3	8	.35	.42	1.6	.89	.40
9	3.5	3.5	2.25	6	.39	.38	1.7	.83	.36
6.75	3	2.25	1.75	4.25	.44	.33	1.9	.75	.22
5	2.5	1.5	1.25	3	.54	.30	2		.17
3.75	2.25	1		2	.60	.27			

Individual with constrictions

Individual N^o. 45
Bitauni

D	U	H ₁	H ₂	W	$\frac{U}{D}$	$\frac{H_1}{D}$	$\frac{W}{H_1}$	$\frac{H_1-H_2}{H_3}$	$\frac{H_1-H_2}{H_1}$
89.5	34	33	18.5	47	.38	.37	1.4	.66	.44
71	25	27	15	37.5	.35	.38	1.4	.67	.44
56	19.5	22	12	31	.35	.39	1.4	.69	.45
44	14	18	10	25	.32	.41	1.4	.67	.44
34	10	14.5	8	20.5	.29	.43	1.4	.72	.45
26	6.5	12	6.5	16	.25	.46	1.3	.82	.46
19.5	4.5	9	5.25	13	.23	.46	1.4	.83	.42
14.25	3.75	6.5	3.75	9.5	.26	.47	1.4	.90	.42
10.75	3	4.5	3	7	.28	.46	1.4	.75	.33
7.75	2.75	3	2.25	5	.35	.40	1.7	.50	.25
5.5	2.75	2.5	1.25	3	.50	.37	1.5		

TABLE X.
Dimensions in mm

D	U	H ₁	H ₂	W	$\frac{U}{D}$	$\frac{H_1}{D}$	$\frac{W}{H_1}$	$\frac{H_1-H_2}{H_3}$	$\frac{H_1-H_2}{H_1}$
91.5	34.25	32.5	18	±42	.37	.35	?	.66	.45
73.5	27	27	16	?	.37	.37	?	.75	.41
57.5	21	22	13	±30	.36	.38	±1.4	.65	.41
44.5	16	17.25	9.75	±25	.36	.39	±1.4	.70	.43
34.75	12	14	8	±20	.35	.40	±1.4	.70	.43
26.75	9	11	6.75	16	.34	.41	1.45	.80	.39
20	7.5	8.25	5	12.75	.37	.41	1.5	.85	.39
15	6.5	5.5	3.5	9.5	.43	.37	1.7	.70	.36
11.5	5.5	3.75	2.5	7	.48	.33	1.8	.65	.34
9	5	2.75	1.75	5	.55	.31	2	.60	.37
7.25	4.5	2	1.50	4	.58	.28	1.8		.25
5.75	4	1.75	1.25	3.25	.70	.3			

TABLE XII.
Dimensions in mm

D	U	H ₁	H ₂	W	$\frac{U}{D}$	$\frac{H_1}{D}$	$\frac{W}{H_1}$	$\frac{H_1-H_2}{H_3}$	$\frac{H_1-H_2}{H_1}$
27.75	9	11.6	6.5	18	.325	.48	1.35	.80	.44
21.25	6.5	8.6	4.6	14	.305	.40	1.6	.90	.46
16.65	6	6.5	3.9	11.5	.36	.40	1.8	.84	.40
12.75	5.4	4.5	2.75	8.6	.425	.36	1.9	.83	.30
10	5.2	3.1	2.2	7	.52	.31	2.3	.56	.21
7.8	4.8	2.1	1.65	5.2	.615	.27	2.5	.40	.22
6.15	4.5	1.6	1.25	4	.73	.26	2.5	.35	.25
4.9	4	1.2	0.9	3.3	.80	.24	2.75	.30	.10
4	3.25	1.0	0.9	2.5	.80	.25	2.5		
3.1	2.5	1.0		1.7	.80	.32	1.7		

N. B. This individual has been measured with an enlargement $\times 20$. It was originally labelled by SMITH as P. "tschernyschewi"

Individual N^o. 73

D	U	H ₁	H ₂	W	$\frac{U}{D}$	$\frac{H_1}{D}$	$\frac{W}{H_1}$	$\frac{H_1-H_2}{H_3}$	$\frac{H_1-H_2}{H_1}$
114.5	32.5	47	26.25	66.5	0.28	.41	1.4	.73	.40
88.25	24	37	20.5	57	0.27	.42	1.5	.77	.45
67.75	19	28.5	16	45.5	0.28	.42	1.6	.88	.44
51.75	17	21.5	12.75	36.5	0.33	.41	1.7	.97	.41
39	16	14.25	9	27	0.41	.36	1.9	.84	.37
30	15	9	6.5	21	0.50	.30	2.3	.59	.28
23.5	14	6.25	4.75	16.5	0.60	.27	2.6	.46	.25
18.75	13	4.25	3.5	12.5	0.70	.23	2.9	.26	.18
15.25	12	3.25	2.75	9	0.78	.21	2.8	.22	.15
12.5	10	2.875	2.5	7.5	0.80	.23	2.6	.21	.11
10	8	2.25	2	5.5	0.80	.22	2.4		.11
8	7	1.75	1.5	4	0.87	.22	2.3		
6.5	6			4	0.92				

Fig. 5

Individual N^o. 34
Hatu Dame

D	U	H ₁	H ₂	W	$\frac{U}{D}$	$\frac{H_1}{D}$	$\frac{W}{H_1}$	$\frac{H_1-H_2}{H_3}$	$\frac{H_1-H_2}{H_1}$
92.25	39	35	20.25	±56	.42	.38	1.6	.82	.42
72	33	25	15.5	46	.45	.35	1.8	.73	.38
56.5	28	18	11.25	37	.50	.32	2	.64	.37
45.25	25	13	7.75	31	.55	.29	2.4	.66	.40
37.5	21.5	10.5	6.5	25	.57	.28	2.4	.60	.38
31	19	8	5	20	.61	.26	2.5	.55	.37
26	16.75	6.75	4	16.5	.64	.26	2.4	.58	.41
22	14.5	5.5	3.5	13.5	.66	.25	2.4	.50	.36
18.5	12.5	4.75	3	11	.68	.26	2.3	.50	.37
15.5	11	4	2.5	8.5	.71	.26	2.1	.50	.31
13	9.5	3.5	2.25	6.5	.73	.27	1.9	.50	.36
10.75	8.5	3	2	5.5	.80	.28	1.8		.33
8.75	7.5	2.5	1.75	4.5	.86	.29	1.8		.30

Furthermore an interesting correlation is to be noted between the proportions $\frac{U}{D}$ and $\frac{H_1}{D}$ and between $\frac{U}{D}$ and $\frac{W}{H_1}$, as illustrated in tables 3 and 4.

very slowly but gradually. The form remains evolute, but less than in the beginning. With a diameter of 25 mm $\frac{U}{D}$ indices are reached of 0.57, 0.52 and 0.64 respectively.

The cross section of the umbilicus of the adult shell of these individuals is very typical: it is cup shaped with a broad flat bottom (fig. 4).

In the second group of individuals (ind. 33, 37, 43, 45, 47, 64, 73) the evolute character diminishes very quickly after the larval stage: already with a diameter of 25 mm a marked involute form is reached with $\frac{U}{D}$ indices of respectively 0.23, 0.30, 0.27, 0.25, 0.34, 0.32 and 0.27.

The development of this group during its further growth is extremely curious.

The maximum of involution is reached at a diameter of 25—35 mm. Afterwards the umbilicus opens again, sooner or later a "sundaicum stage" is reached and even evolute tendencies appear again.

The cross section of the umbilicus in this group is again very characteristic: it has a deep calyx shape with a very small flat bottom and steep sides (fig. 3 and 5).

In a very few cases only this regression to evolutism is slow and a certain tendency prevails to remain for some time in the involute stages (ind. 57, 65 and 77). This proves that the species "*australe*" and "*wanneri*" are merely individual development stages of members of the second group.

§ 4. The same conclusion is reached as regards the so called "*gigas*" form. All individuals begin life with constrictions, being in early youth perhaps rather sensitive to certain external conditions, which might influence the form of the aperture. Some of the individuals keep this sensitiveness in the adolescent stage: as many as 9 volutions with constrictions having been noted (ind 2), to other individuals the constrictions return at maturity and the result is, that a large percentage of the adult shells of the normal type (second group) show well marked or faint constrictions.

As a matter of fact, amongst the individuals of more than 100 mm about 50 % have visible constrictions.

It proves that the occurrence of these constrictions is more an individual quality, rather than a specific character.

§ 5. It is possible, that the graph is phenotypically composed of two fixed genotypes: the irregularity of the graph in its left part and the correlation of the indices $\frac{U}{D}$ and $\frac{W}{H_1}$ seem to point in this direction, whilst the occurrence of two typical divergent ontogenetic forms of development,

giving rise to distinct forms of umbilicus, might be a further indication in favour of this opinion. However, the complete identity of septa and sculpture, also to a certain extent the similarity in the final stages of both ontogenetic lines of development, point towards a conclusion in favour of a classification only into variants.

§ 6. We have also now to deal with the supposed occurrence of *Paralegoceras tschernyschewi* KARPINSKY among the timorese family.

P. tschernyschewi has been established by KARPINSKY (Bibl. 6, p. 62) because of the occurrence of a single fragmental piece in the Artinsk beds.

The following description is quoted in the original form from KARPINSKY's paper :

„Das Gehäuse, besonders die eine Hälfte desselben ist verunstaltet ;
„daher müssen die unten angeführten Dimensionen nur als annähernde
„betrachtet werden, obgleich sie sich höchstwahrscheinlich den thatsäch-
„lichen sehr nähern. Die Dicke der Umgänge ist durch die zweifache
„Dicke der wohl erhaltenen Hälfte angegeben worden.

„Durchmesser	ungef. 137 mm
„Höhe des letzten Umganges	60
„Breite „ „ „	50
„Durchmesser des Nabels	40
„Breite der Nabelwand	12
„Höhe des vorletzten Umganges	28
„Durchmesser des Nabels	21."

Curiously enough the illustration of the section of the whorl, which is incorporated in KARPINSKY's paper (Bibl. 6, Plate III, fig. 1c) does not coincide with the quoted dimensions, but, since the illustration is a reconstruction, one can better trust the quoted dimensions, particularly as in the general description of the form, it is expressly stated that the height of the whorl is slightly larger than the width.

Calculating the proportional figure $\frac{W}{H_1}$ of the original *P. tschernyschewi*, 0.83 is found. This, however is a figure quite out of the range of the timorese $\frac{W}{H_1}$ indices, which, without a single exception, all measure $\frac{W}{H_1} > 1$.

The conclusion is that *Paralegoceras tschernyschewi* KARPINSKY does not occur in Timor. In any case it cannot be incorporated with *Metalegoceras* as the internal septa are unknown.

§ 7. SMITH's final argument for the establishment of six species of *Paralegoceras* is their supposed derivation from different species of *Gastrioceras* (Bibl. 9, p. 31).

The only forms however whose origin is discussed by SMITH, are *P. evolutum* and *P. sundaicum*.

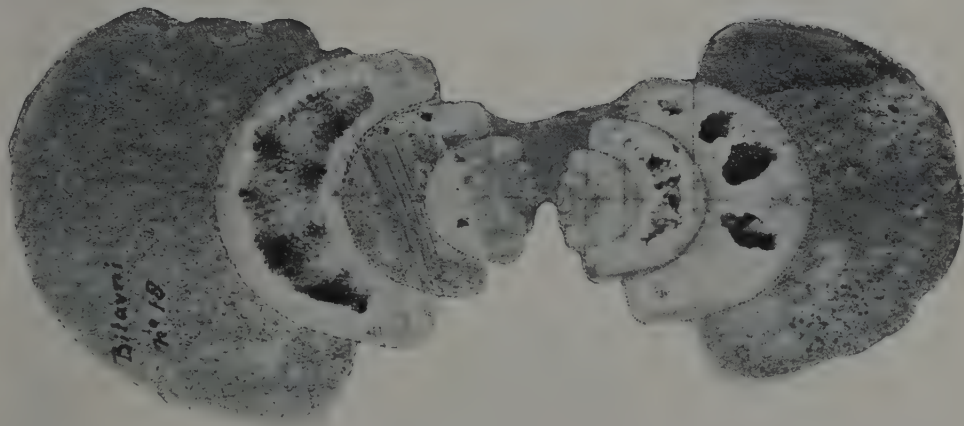


Fig. 3. *Paralegoceras sundaicum* HANIEL, type, Bitauni. Natural size.

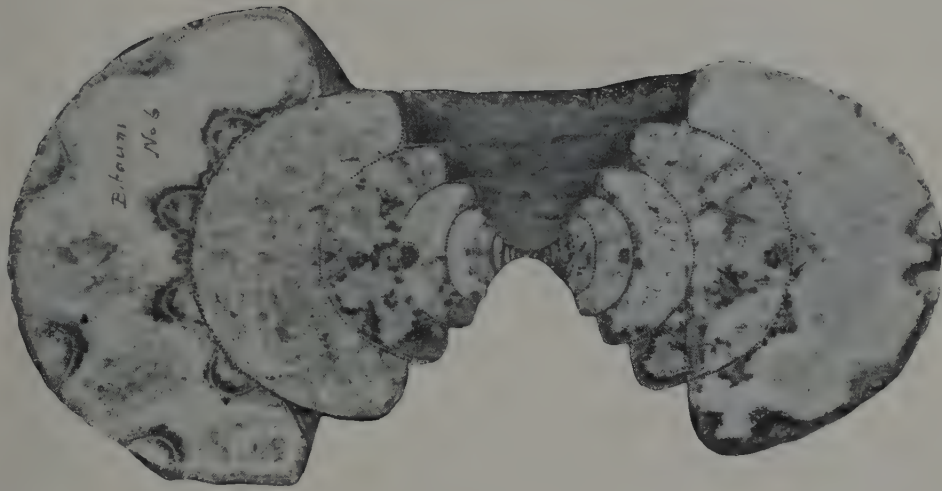


Fig. 4. *Paralegoceras sundaicum* HANIEL, v. f. evoluta, Bitauni. Natural size.

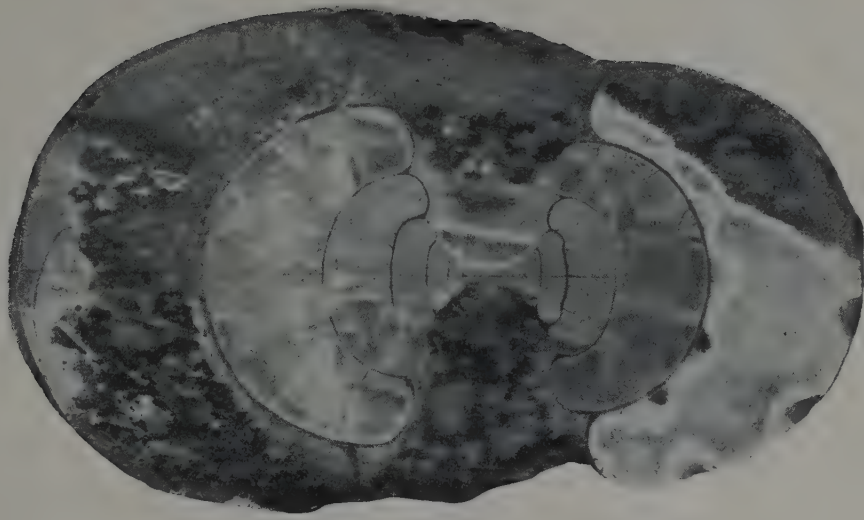


Fig. 5. *Paralegoceras sundaicum* HANIEL, type, Bitauni. Youthful stage, $\times 3$.

Of the first "*Gastrioceras excelsum* MEEK from the Upper Coal Measures of Kansas may well be the ancestor" (Bibl. 9, p. 33) and of *P. sundaicum* it is claimed, that "either *Gastrioceras russiense* TZWETAEW. of the Russian Coal measures, or *Gastrioceras excelsum* HYATT (?), of the Bend formation of Texas might be the ancestor" (Bibl. 9, p. 35).

The origin of the other forms is not discussed, making the argumentation of the derivation from different species of *Gastrioceras* rather weak, or at least insufficiently founded.

If any, a derivation from a local *Gastrioceras*, such as *G. hanieli* SMITH or *G. beluense* HANIEL (both being according to SMITH nearly related to *G. excelsum*) is the more satisfactory supposition, but in this particular instance it seems wiser not to consider any phylogenetic speculation.

§ 8. The final conclusions of the writer are :

10. *Paralegoceras sundaicum* HANIEL appears in Timor in two variants :

a. an evolute variant with broad coils (large $\frac{U}{D}$ index, small $\frac{H_1}{D}$); this variant is a primitive, conservative form, as the characteristics of youth are conserved during individual development ;

b. the normal type, beginning life as an evolute form, identical to the a variant, but strongly evolving ontogenetically.

These two forms can easily be distinguished by their umbilical habitus as illustrated in fig. 3 and fig. 4.

20. *Paralegoceras wanneri* and *P. australe* are individual stages in the development of *P. sundaicum* ; they have no specific independence and the names should be cancelled.

30. *Paralegoceras gigas* is an accidental form of *P. sundaicum*.

The name *gigas* should be withdrawn.

40. *Paralegoceras tschernyschewi* does not occur in Timor.

Referring to the type and the var. form. *evoluta* it might be interesting to remember, that similar relations between conservative and evolving variants have been met by CLOOS with *Hammatoceras moluccanum* from the Dogger of the isle of Misool (Bibl. 3) and by VON BUBNOFF with triassic *Hungarites* forms (Bibl. 2, p. 573). This generality of the phenomenon gives rise to the supposition that the relation might be a form of sex dimorphism.

Amsterdam, Geological Institute of the University.

BIBLIOGRAPHY.

1. ROLAND BRINKMANN, Statistisch-Biostratigraphische Untersuchungen an Mitteljurassischen Ammoniten. Über Artbegriff und Stammesentwicklung. Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. Neue Folge, 13 Band, 1929.

2. S. VON BUBNOFF, Die ladinische Fauna von Forno bei Predazzo. Verhandlungen des Naturhistorisch-Medizinischen Vereins zu Heidelberg. Neue Folge, 14 Band, 1921.
3. HANS CLOOS. Doggerammoniten aus den Molukken. Habilitationsschrift, Stuttgart, 1916.
4. C. A. HANIEL, Die Cephalopoden der Dyas von Timor. Paläontologie von Timor, herausgegeben von JOH. WANNER. III. Lieferung, Stuttgart 1915.
5. W. JOHANNSEN, Elemente der exakten Erblchkeitslehre, Jena, 1926. (Third german edition.)
6. A. KARPINSKY, Über die Ammoneen der Artinsk-Stufe und einige mit denselben verwandte carbonische Formen. Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de Saint-Petersbourg, VII Série, T. XXXVII, 1890.
7. HANS KLÄHN, Der Wert der Variationsstatistik für die Palaeontologie. Berichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. Br. 22 Band, 2^o Heft, 1920.
8. O. H. SCHINDEWOLF, Über den Ammoniten-Sipho. Sitzungsberichten der Preussischen Geologischen Landesanstalt. Heft 6. Berlin, 1931.
9. JAMES PERRIN SMITH, Permian Ammonoids of Timor. Jaarboek van het Mijnwezen in Nederlandsch Indië, 1926. Verhandelingen, Eerste gedeelte, 's-Gravenhage, 1927.
10. R. WEDEKIND, Über die Grundlagen und Methoden der Biostratigraphie. Berlin, 1916.
11. ——— Die Genera der Palaeoammonoidea (Goniatiten). Palaeontographica. 62ter Band. Stuttgart, 1916—1919.

Geology. — *Sur le Pli-nappe de Lujar-Gador (Cordillères Bétiques).*
Par A. H. BANTING. (Communicated by Prof. H. A. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

Introduction.

Les traits géologiques essentiels des montagnes andalouses ont été reconnus par M. BROUWER, qui en 1926 a éclairci la tectonique alpine des Cordillères Bétiques (Voir lit. 1 et 2).

Dans une coupe transversale à la hauteur de Grenade (1) il distinguait les unités suivantes :

1. La fenêtre de la Sierra Nevada avec sa zone broyée („Mischungszone“) qui est comparable à la fenêtre du Hohe Tauern.
2. Plusieurs nappes bétiques dans les Alpujarras et dans la zone périphérique septentrionale de la Sierra Nevada. D'après l'auteur on peut comparer cette unité aux éléments inférieurs des Alpes Orientales.
3. La masse de charriage subbétique, équivalente aux nappes supérieures des Alpes Orientales.

Pour le moment, nous ne nous intéressons que pour l'unité moyenne : c.à.d. l'ensemble des nappes bétiques, qui ont été étudiées amplement par MM. VAN BEMMELEN (3) et WESTERVELD (4).

Le premier explorait la province de Grenade y distinguant trois plis-faille (ses „Alpujarrides.“ Voir 3, pag. 120 et feuille I).

De bas en haut il les dénommait :

1. La nappe de Lujar, dont les calcaires composent la fenêtre de la Sierra de Lujar, qui apparaît dans les schistes et les phyllites appartenant au socle de la nappe de Lanjaron. Près du village de Lanjaron cette nappe chevauche la „Mischungszone” de la Sierra Nevada, d'où il concluait que la nappe de Lujar est localisée au Sud de la culmination pennique.

2. La nappe de Lanjaron, qui se compose de

c. calcaires et dolomies triasiques ;

b. phyllites du Trias ;

a. schistes cristallins.

Les schistes cristallins ne se trouvent qu'au Sud, le long du rivage de la Méditerranée ; plus au nord la nappe est formée exclusivement par des roches triasiques. Les calcaires constituent le Synclinal de Lanjaron, qui se prolonge dans la Sierra de las Guájaras.

Le long du versant occidental de la Sierra Nevada on peut suivre cette unité tectonique jusqu'à l'autre côté de la Sierra, où l'on retrouve la nappe de Lanjaron redoublée dans la montagne de Tocon.

3. La nappe de Guájar, qui a été conservée par l'érosion, dans les synclinaux de Lanjaron et de la Sierra de las Guájaras et dont les lambeaux sont couchés sur le dos de la nappe de Lanjaron dans la montagne de Tocon.

M. WESTERVELD analysait la structure géologique des montagnes de Las Alpujarras.

Dans cette région il retrouvait les deux nappes inférieures de M. VAN BEMMELEN. La nappe de Lujar se rencontre en dehors de la Sierra de Lujar dans d'autres fenêtres plus orientales. Sa dénomination de „Nappe de Gador” provient du fait que la nappe de Lanjaron montre son plus grand développement dans la vaste Sierra de Gador.

En résumant les résultats de plusieurs auteurs (3, 4, 5, 6), il était à même de publier une carte tectonique des chaînes bétiques orientales (voir lit. 4, feuille III). En dehors de la Sierra de Gador et de la contrée de phyllites et de schistes de Las Alpujarras, sur le versant méridional de la Pennique, il importe d'y attribuer aussi la Sierra Alhamilla. Au nord de cette culmination la même nappe édifie la montagne de Tocon et celles des environs de Serón.

Les montagnes autour de la fenêtre pennique appartiennent donc, d'après l'auteur mentionné, à la carapace étendue de la nappe de Gador. Une variation dans cette structure monotone a lieu à la hauteur de Grenade. Ici la nappe de Lujar paraît en fenêtre à cause d'une culmination transversale. A quelques endroits la plus haute unité, la nappe de Guájar, pouvait échapper à l'érosion post-tectonique à cause d'un plongement axial très accentué.

Cet été j'ai entrepris dans les alentours de Motril des excursions, afin de paralléliser les nappes, qui ont été révélées par les auteurs susdits, aux

masses charriées de la Sierra Tejeda. Les résultats de ces observations et de l'interprétation de la carte exacte de M. WESTERVELD m'amènent à changer un peu la manière de voir la structure géologique des Cordillères Bétiques Orientales.

Les nappes bétiques ne sont pas toutes des exemples magnifiques de chevauchements („fraaie voorbeelden van breukoverschuivingen", WESTERVELD pag. 94). La nappe inférieure (ma nappe de Lujar-Gador) au contraire paraît être un pli-nappe avec une amplitude de plus de vingt-cinq kilomètres. Les montagnes au sud du Pennique appartiennent, comme nous verrons, toutes à ce pli-nappe.

Auprès de Motril la nappe de Lanjaron apparaît dans la topographie à cause du plongement axial.

D'après notre conception on devra distinguer dans les chaînes bétiques les unités suivantes :

- | | | |
|--------------------------------------|---|------------------------|
| 3. nappe de Guájar (pli-faille); | } | Nappes bétiques (s.s.) |
| 2. nappe de Lanjaron (idem); | | |
| 1. nappe de Lujar-Gador (pli-nappe). | | |

Las Alpujarras.

La petite colline de Motril, sur laquelle a été bâti le „Santuario de Nuestra Señora de La Cabeza" se compose de schistes graphitiques à biotite, qui plongent vers le sud-ouest.

De cette hauteur on a un coup d'oeil sur la plaine productive de la Vega de Motril, qui a été formée par les dépôts récents du Rio Guadalfeo.

On peut suivre les schistes, dont nous venons de faire la connaissance et qui appartiennent probablement au Carbonifère, le long de la route qui mène à Grenade. Pour le reste ils forment les coteaux à l'ouest de cette chaussée, qui perce soudainement à quelques trois kilomètres au nord de Motril une arête de calcaires triasiques. Ces roches plongent sous les schistes primaires. C'est le contact anormal de deux nappes superposées, dont la plus haute s'appelle la nappe de Lanjaron. On peut voir en effet auprès d'Itrabo et de Molvizar les calcaires dolomitiques de cette nappe couvrants les schistes qui se prolongent au sud jusqu'à Motril, et au nord, le long du versant oriental de la Sierra de las Guájaras, jusqu'à Lanjaron, où ils s'enfoncent sous les calcaires du Synclinal de Lanjaron.

A l'est de la grande route s'étend une vaste contrée bleu-grise de phyllites, d'où se dresse au nord-est la silhouette obscure de la Sierra de Lujar.

Le long de la route nous distinguons la succession suivante :

bancs épais de calcaires dolomitiques foncés ;
calcaires noirâtres bitumineux ;
calcaires minces stratifiés avec des délits phyllitiques, très souvent ondulés ;
phyllites calcaires, bancs minces de quartz, gypse, des phyllites barriolées (verts, roses, bleus), des calcaires durs, jaunâtres ;

série monotone très épaisse de phyllites bleu-grises satinées, qui constituent la région accidentée à l'est du chemin.

Quittons maintenant la chaussée en nous dirigeant dans le sens du dôme de la Sierra de Lujar.

Les phyllites plongent presque partout vers le sud-ouest. A quelques deux kilomètres de Lagos, elles changent de constitution et deviennent graduellement plus schisteuses et plus dures. De temps en temps on rencontre une écaille de biotite: ce sont les schistes qu'on a appelés „schistes de transition". Un peu plus au nord s'élève une rangée de collines d'aspect rougeâtre. On y trouve les micaschistes grenatifères prétriasiques, ayant également une inclinaison vers le sud-ouest. Sous ces schistes s'étendent vers le nord successivement les schistes de transition, les phyllites bleu-grises, les phyllites barriolées avec des bancs minces de quartzite, les phyllites calcaires et en dernier lieu les calcaires statifiés de la Sierra de Lujar. C'est donc la même succession de roches que nous avons déjà rencontrée au sud des schistes, seulement ici elles se présentent en sens inverse: *Les schistes constituent le noyau d'un pli-nappe* (voir coupe I), qui possède un plongement axial vers l'ouest.

Les calcaires que nous avons remarqués le long de la chaussée à Grenade s'unissent en effet à Velez de Benaudalla avec les mêmes roches de la Sierra de Lujar, c.à.d. les calcaires se recourbent ici de leur position normale dans une situation inverse. Les phyllites sont coincées entre des lames de calcaires. Au S-O de Lagos les schistes disparaissent vers l'ouest entre les phyllites du flanc normal et celles du flanc inverse. Le plongement axial peut se constater par l'inflection des allongements: d'O-E qu'ils sont au sud de la Sierra de Lujar, ils deviennent N-S près de Velez de Benaudalla.

Sur le versant septentrional de la Sierra de Lujar les calcaires du flanc normal plongent sous les phyllites de la nappe de Lanjaron. Le nord de cette Sierra est donc constitué, toute comme la région occidentale au nord de Velez de Benaudalla, par les calcaires du flanc normal de notre pli de recouvrement. La transition des calcaires normaux aux calcaires du flanc inverse se trouve, comme nous avons vu, près de Velez de Benaudalla, mais elle disparaît dans l'air à l'est de ce village. La zone méridionale c.à.d. la plus grande partie de la *Sierra de Lujar* est donc formée par les calcaires du *flanc inverse*. De l'examen de la carte des Alpujarras, que nous ferons maintenant, il paraîtra que les calcaires du *flanc normal* ont leur plus grand développement dans la *Sierra de Gador*. C'est pourquoi nous proposons pour le pli-nappe que nous venons d'étudier le nom de „*Nappe de Lujar-Gador*".

A cause de la trop grande influence que le terrain accidenté des Alpujarras exerce sur les configurations des lignes d'affleurement dans la carte de M. WESTERVELD, nous avons dressé une esquisse schématique, qui reproduit la section de la structure géologique par un plan horizontal à une hauteur de 800 mètres au-dessus du niveau de la mer. Parmi les coupes sémischématiques que nous y avons annexées il faut situer le no I à l'ouest

du passage, que nous avons fait. Les schistes y ont déjà disparus à cause du plongement axial occidental sous le plan topographique.

Vers l'est la Sierra de Lujar se prolonge dans une aire anticlinale calcaire, qui affleure dans les fenêtres d'Albuñol, de Cerron, de Calares de Turon et de Loma del Pardo. Sur ces calcaires nous trouvons au nord comme au sud, d'abord des phyllites et puis des schistes. Nous retrouvons donc ici le prolongement du flanc inverse dont nous avons fait la connaissance près de Lagos. Il y a cependant une complication. Souvent les phyllites ont été broyées complètement, ce qu'on peut déduire de la description des „conglomérats marneux" de la fenêtre d'Albuñol (4. pag. 89). Ces brèches de friction, qui sont constituées principalement par des menus dolomitiques, au milieu desquels nous trouvons cependant des morceaux de phyllites, d'ardoises, de feldspath et de quartz sont situées entre les calcaires et les schistes et occupent par conséquent la place des phyllites.

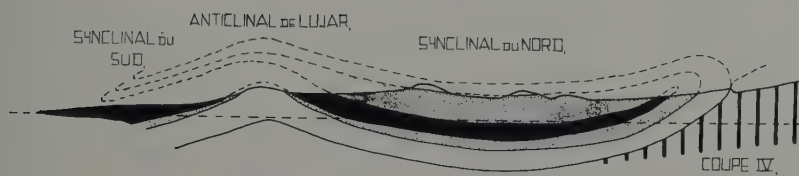
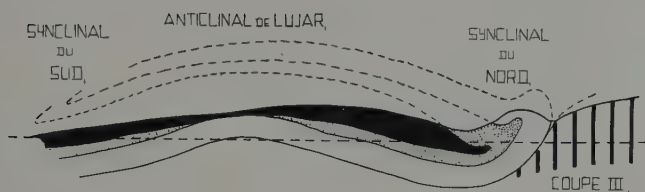
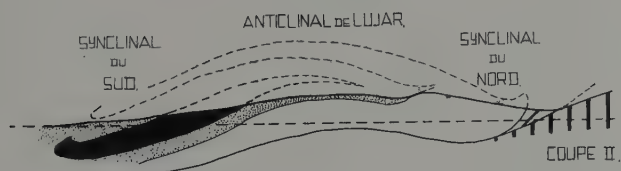
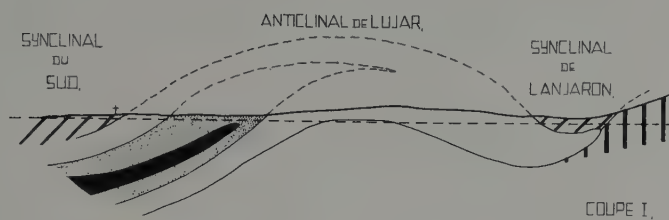
Au nord comme au sud de ce pli anticlinal de Lujar il y a une aire synclinale, dans lesquelles on trouve les débris du flanc normal. Nous appellerons ces plis-synclinaux resp. le „Synclinal du Nord" et le „Synclinal du Sud". A cause du plongement axial vers l'est qui règne ici, l'affleurement du contact des calcaires avec les phyllites du flanc normal dévie ici de l'est à ouest (voir la petite carte). Grâce à cette déviation nous pouvons situer sur notre carte les positions des axes tectoniques. Le Synclinal du Sud est renversé vers le nord, tandis que le Synclinal du Nord est une auge plus ou moins symétrique.

Sur le versant méridional de la Sierra Nevada les calcaires du flanc normal s'unissent à ceux du flanc inverse au nord-est près de Laujar ; ainsi que près de Velez de Benaudalla les phyllites plongent entre les calcaires, ce qui veut dire que la charnière frontale des phyllites se trouve ici au même niveau que notre plan de dessin. A l'ouest le noyau mince de schistes que nous pouvons suivre le long de la plus grande partie de la Sierra Nevada s'enfonce sous ces phyllites : nous avons donc ici la charnière des schistes.

Nous pourrions donc nous attendre à trouver le front de la nappe sur le versant de la Sierra Nevada. Un examen sur les lieux devra démontrer si les calcaires, qui affleurent sur la pente de cette montagne et qui ont été influencés très fortement par les mouvements tectoniques et mêmes étirés sur de grands espaces, appartiennent à ce front ou s'ils doivent être attribués au flanc inverse. Les remarques de M. WESTERVELD, que les schistes de la Sierra sont très souvent renversés et que les calcaires ont vers cette montagne une inclinaison de moins en moins accentuée pourraient être des indices pour l'exactitude de la première hypothèse.

A l'ouest ces calcaires s'unissent à ceux de la Sierra de Lujar. Au moyen des lignes d'affleurement de la carte de l'auteur mentionné nous sommes à même de vérifier que dans la partie septentrionale de la Cerro Campuzano et de la Cerro Conjuero il y a de très fortes inclinaisons vers le nord-ouest. Ce qui pourrait s'expliquer par le fait que le front du pli-nappe a été repoussé ici plus ou moins vers le sud à cause de quoi les calcaires ont pris

A. H. BANTING: SUR LE PLI-NAPPE DE LUJAR-GADOR (CORDILLÈRES BÉTIQUES).



des inclinaisons très raides sous les phyllites de la nappe de Lanjaron (coupe III).

Ce front de la nappe disparaît alors à l'ouest de la Cerro Campuzano sous la nappe de Lanjaron par un plongement axial vers l'ouest pour réapparaître dans la crête gypsifère près de Lanjaron sous formes de „nez” de la nappe de Lujar (d'après la description de V. BEMMELEN). Cfr. coupes I et II.

Les schistes du versant sud de la Sierra Nevada, qui appartiennent au flanc septentrional du Synclinal du Nord disparaissent près de Castaras sous les phyllites. Nous trouvons donc ici la charnière des schistes au niveau de 800 m. Au dessous de ce plan ils devront être reliés aux schistes du flanc méridional du synclinal. Près de Torbiscon la charnière apparaît une autre fois dans le plan de dessin, se relève vers le sud pour disparaître finalement près de Lagos au versant méridional de la Sierra de Lujar.

Tout comme les schistes du flanc septentrional du Synclinal du Nord disparaissent entre les phyllites, ceux-ci font de même entre des calcaires (probablement au nord d'Almegijar, où l'on retrouve d'après la carte de WESTERVELD des phyllites pincés entre des calcaires). Entre le Cerro Campuzano et le Cerro Serreta, les phyllites apparaissent de nouveau; il faudra les relier aux phyllites du versant méridional de la Sierra de Lujar par dessus cette dernière colline et à travers du synclinal transversal à pentes raides dans les calcaires de Co. Camacho (WESTERVELD, p. 88).

Dans notre schéma nous avons indiqué la projection des lieux géométriques des points d'inflexion dans les schistes, les phyllites et les calcaires. Si l'inflexion a lieu au dessus de 800 m. la projection est inscrite en pointillé; pour autant que la charnière se trouve au dessous du même niveau la projection a été indiquée au moyen de petites croix.

Si nous traversons l'Anticlinal de Lujar vers l'est, nous rencontrons très peu de phyllites entre les calcaires des fenêtres les plus orientales (de Calares de Turon et de Loma del Pardo) et ceux du flanc normal (Sierra de Gador). Les schistes y font complètement défaut. Puisque nous avons rencontré des phénomènes de laminage dans la partie occidentale du même anticlinal (fenêtre d'Albunol) il est évident que nous pouvons légitimer ici le défaut de schistes par une explication analogue à celle que nous avons appliqué là à l'absence des phyllites. Le plan de charriage poli que M. WESTERVELD a trouvé le long de la route de Berja à Alcolea (voir W., pag. 93) semble être un soutien pour cette hypothèse.

La Region à l'Est de Berja.

La structure de la Sierra de Gador n'est pas connue du tout. On peut soupçonner que la culmination et les deux dépressions des Alpujarras se prolongent dans cette montagne qui est formée complètement par les calcaires du flanc normal. Puisqu'on admet que le plissement posthume, dont elles sont les conséquences tectoniques, coïncide avec le bombement de la

Sierra Nevada (v. BEMMELEN, pag. 123) on peut supposer que leurs axes sont plus ou moins parallèles à l'allongement tectonique de la fenêtre pennique (circa N 78 E). Si nous prolongions l'axe de l'Anticlinal de Lujar dans cette direction vers l'est nous aboutirions à 1.5 km. au sud du village de Gador sur le Rio de Andarax. A l'autre côté de cette rivière s'élève la Sierra de Alhamilla, qui d'après HETZEL (5) a une structure anticlinale très évidente et qui a été conçu par lui comme le prolongement immédiat de la Sierra de Gador. La direction de l'axe tectonique est comme celle de la Sierra Nevada N 78 E. Prolongé vers l'ouest il aboutirait à 1.5 km. au nord de Gador. Il est donc admissible de considérer la Sierra Alhamilla comme le prolongement de l'Anticlinal de Lujar. A l'est du Rio de Andarax son axe a été poussé vers le nord. Nous arrivons donc à la même conclusion que HETZEL, qui, pour d'autres motifs, a admis un déplacement de la Sierra Alhamilla par rapport à la Sierra de Gador.

D'après ce qui paraît il n'y a que le flanc normal et les schistes du noyau qui affleurent dans la Sierra Alhamilla et dans la Sierra de Cabrera (à l'est de la première). La série supérieure du Trias (surtout des phyllites. Voir 5, pag. 7) appartient peut-être déjà à la nappe de Lanjaron. Le reste de cette nappe et les nappes supérieures pourraient avoir disparu par l'érosion pré-éocène. Les dépressions (plaines tertiaires) au N. et au S. de ces montagnes doivent être parallélisées avec les Synclinaux du Nord et du Sud des Alpujarras.

Les lambeaux de Trias qui ont été épargnés en quelques points par l'érosion sur le versant méridional de la Sierra de los Filabres (par ex. près de Bédar) peuvent appartenir au front du pli-nappe.

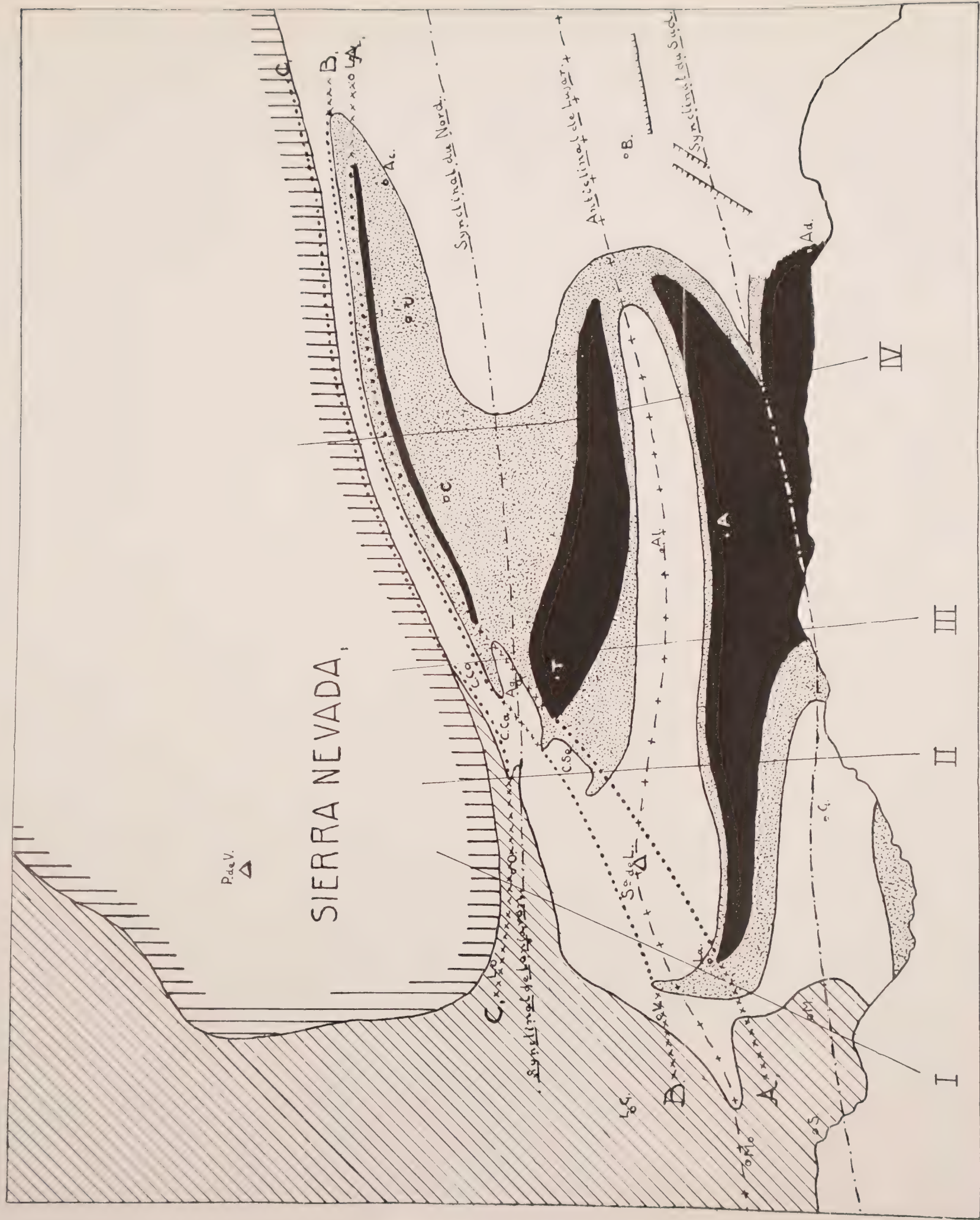
A l'est de la Sierra Cabrera la nappe de Lujar-Gador a disparue dans la Méditerranée suivant des failles très raides.

La Région à l'Ouest du Rio Guadalfeo.

L'Anticlinal de Lujar se prolonge aussi à l'ouest de la Sierra de Lujar. Les schistes de la nappe de Lanjaron forment notamment une avie anticlinale au nord d'Almuñecar. Sur le littoral les schistes disparaissent dans la mer (aussi que les calcaires près de La Herradura). Près d'Itrabo sur le sud de la Sierra de las Guájaras ils ont une inclinaison vers le nord. L'allongement tectonique y est environ N 82 E. Les Sierras de Mijas et Blanca (dans la province de Malaga), qui d'après BLUMENTHAL (7) sont des fenêtres triasiques dans la Bétique de Malaga, se trouvent dans cette direction.

Le synclinal de Lanjaron se continue d'après v. BEMMELEN dans la Sierra de las Guájaras.

Du fait que nous ne possédons pas de bonne carte géologique de la région méridionale de la Sierra de Lujar il nous est impossible d'y localiser, même approximativement le synclinal du Sud. De la carte de WESTERVELD on peut conclure que l'axe synclinal possède un plongement vers l'ouest



Carte Schématique de la Tectonique des Alpujarras. Echelle 1 : 300.000.

LÉGENDE:

en blanc : calcaires
pointillé : phyllites
en noir : schistes cristallins

hâchures obliques : nappes de Lanjaron et de Guájjar.
" verticales : la Sierra Nevada.

Les courbes A, B et C sont les projections des charnières des schistes (A), des phyllites (B) et des calcaires (C). Si les charnières se trouvent au dessous du plan de dessin leurs projections ont été indiquées par des croix ; si elles se trouvent au dessus de ce niveau, elles sont projectées en pointillé.

P de V = Picacho de Veleta.
Sa de L = Sierra de Lujar.
L = Lanjaron.
L-G = Las Guájaras.
V = Velez de Benaudalla.
M = Motril.
La = Lagos.
Mo = Molvizar.

S = Salobreña.
O = Orgiva.
G = Gualchos.
Al = Albondon.
A = Albuñol.
T = Torbiscon.
Ag = Almegijar.
C Ca = Cerro Campuzano.

C Co = Cerro Conjuero.
C Se = Cerro Serreta.
U = Ugijar.
C = Cadiar.
Ac = Alcolea.
Ad = Adra.
B = Berja.
Lau = Laujar.

à la hauteur de Gualchos. Grâce à ce plongement les calcaires du flanc normal affleurent dans la topographie. Les inclinaisons très raides de ces calcaires près de Castell de Ferro nous indiqueraient entre autres que le Synclinal du Sud possède ici comme dans la Loma Salobra un plan axial incliné vers le sud. Cette hypothèse n'est admissible que pour autant que nous serions dans la possibilité de constater que les phyllites se trouvent sur les calcaires avec une même inclinaison. Dans la carte schématique nous avons admis cependant dans cette région occidentale un Synclinal du Sud renversé vers le nord, qui disparaîtrait dans la mer à l'ouest du Rio Guadalfeo.

Résumé.

Après une enquête provisoire de la constitution des nappes bétiques dans les environs de Motril il m'a paru, que la nappe de Lujar ne possède pas l'indépendance qu'y ont attribué M.M. VAN BEMMELEN et WESTERVELD. Mais qu'au contraire elle fait partie d'une unité plus grande, d'un pli-nappe, formant lui-même la plus inférieure des nappes bétiques.

Lors de l'examen de la carte des Alpujarras (levée par M. WESTERVELD) je vins à la conclusion que la Sierra de Lujar ainsi que celle de Gador doivent être incorporées dans ce pli-nappe. De là notre dénomination de nappe de Lujar-Gador.

Cette unité ne passe pas la Sierra Nevada et la Sierra de los Filabres et produit toutes les roches constituant les systèmes montagneux au sud de cette culmination. A l'ouest elle disparaît, à la hauteur du Rio Guadalfeo, sous la nappe supérieure de Lanjaron. A l'est elle est submergée par la Méditerranée. La longueur apparente de la nappe est donc environ 160 kilomètres.

Par un plissement posthume l'Anticlinal de Lujar, les Synclinaux du Nord et du Sud ont surgi de la nappe de Lujar-Gador. L'Anticlinal de Lujar figure dans les fenêtres des calcaires du flanc inverse dans les Alpujarras, et se révèle ensuite par l'aire anticlinale de la Sierra Alhamilla (Prov. Almería). Dans la prolongation occidentale de cet anticlinal, les schistes de la nappe de Lanjaron se présentent en voûte le long de la côte méridionale dans la province de Grenade. Dans la province de Málaga la nappe de Lanjaron(?) surgit du Bétique de Málaga (dans les Sierras Blanca et de Mijas). Au sud de l'anticlinal on trouve dans la province d'Almería un bassin tertiaire; dans les Alpujarras un synclinal comprimé (Synclinal du Sud); et finalement dans les Sierras Blanca et de Mijas d'après BLUMENTHAL (lit. 8 *Ergänzung*) une succession typique de schistes et de dolomies. Au nord de l'Anticlinal de Lujar se suivent dans la province d'Almería un bassin tertiaire et dans les Alpujarras une auge peu profonde (Synclinal du Nord) qui se continue vers l'ouest par le Synclinal de Lanjaron et de la Sierra de las Gúajaras. Le long de la Sierra Nevada la tête du pli-nappe est en général encore intact, tandis que, sur le versant septentrional de la Sierra de los Filabres, elle devint une proie à l'érosion.

Si nous examinons la coupe transversale de la nappe de Lujar-Gador (voir p.e. coupe IV) il est peut-être légitimé de voir dans le Synclinal du Sud la zone radicale (synclinal comprimé dans les Alpujarras, structures radicales au versant sud des Sierras Blanca et de Mijas). L'Anticlinal de Lujar en serait la carapace, le Synclinal du Nord la zone plongeante, tandis que le côté sud de la Sierra Nevada nous représenterait la région frontale de cette nappe à arrêt forcé.

Il résulte donc de ces conclusions que la nappe de Lujar-Gador nous procure l'aspect coutumier d'un pli-nappe de caractère alpin avec une amplitude d'environ 25 kilomètres.

LITTÉRATURE CITÉE.

1. H. A. BROUWER: „Zur Geologie der Sierra Nevada“, Geol. Rundschau, Bnd. XVII, Heft 2, 1926.
2. H. A. BROUWER: „Zur Tektonik der betischen Kordilleren“, Geol. Rundschau, Bnd. XVII, Heft 5, 1926.
3. R. W. VAN BEMMEL: „Bijdrage tot de Geologie der Betische Ketens in de Provincie Granada“, Diss. Delft, 1927.
4. J. WESTERVELD: „De Bouw der Alpujarras en het tektonische Verband der Oostelijke Betische Ketens“, Diss. Delft, 1929.
5. W. H. HETZEL: „Bijdrage tot de Geologie van de Sierra Alhamilla (Prov. Almeria)“, Diss. Delft, 1923.
6. C. P. A. ZEYLMANS VAN EMMICHOVEN: „Geologische Onderzoekingen in de Sierra de los Filabres (Prov. Almeria, Spanje)“, Diss. Delft, 1925.
7. M. M. BLUMENTHAL: „Sur le dispositif des nappes de recouvrement de la Serrania de Ronda“, Eclog. geol. Helv., vol. XXI, 1928.
8. M. M. BLUMENTHAL: „Beiträge zur Geologie der betischen Cordilleren beiderseits der Rio Guadalhorce“, Eclog. geol. Helv., vol. XXIII, 1930.

*Geologisch Instituut der Universiteit
van Amsterdam.*

Geology. — *Die mikropaläontologische Untersuchung äolischer Sedimente und ihre Bedeutung für die Florengeschichte und die Quartairstratigraphie.* (Vorläufige Mitteilung). Von W. BEIJERINCK. (Communicated by Prof. L. RUTTEN).

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

Die seit 1930 von mir angestellten Versuche zur Auffindung von Mikrofossilien in äolischen Sedimenten, zwecks diese in derselben Weise auszunützen, wie es die Stratigraphie der Moore und der fluviatilen Sedimente zu tun pflegen, haben bestimmte und teilweise sogar überraschende Resultate geliefert.

Ich bin mir sehr gut bewusst, dass die daran geknüpften Betrachtungen und Folgerungen gewissermaßen noch verfrüht sind, aber es mag seinen Nutzen haben, wenigstens einige vorläufigen Hinweise zu geben, damit zur Kritik, Nachprüfung und Weiterarbeit angeregt wird.

Methode.

Die Proben werden sorgfältig und sauber (in Probengläsern) dem Vertikalprofile entnommen. Jedesmal werden 5 gr. des zuvor gut gemischten Materials einer Probe in ein Reagenzrohr gebracht, worin zuvor 5 cc. einer 10 proz. HNO_3 -Lösung gegossen war. Nach tüchtigem Kochen während einer halben Minute, fügt man 10 cc. einer 2 proz. KOH-Lösung hinzu und kocht wieder eine halbe Minute. Danach wartet man bis das grobkörnige Sandmaterial zu Boden gesunken ist (± 20 Sek.) und giesst die überstehende Flüssigkeit ab in ein Zentrifugenröhrchen. Nach ± 4000 Umdrehungen kann die Flüssigkeit abgegossen werden. Das Residu wird mit 3 Tropfen Glyzerin versetzt und tüchtig gemischt. Dies Material kann in kleinen, von Nummern und weiteren Andeutungen versehenen Preparatenröhrchen aufbewahrt werden zur mikroskopischen Untersuchung. Bevor man ein kleines Tröpfchen dem Materiale entnimmt, soll tüchtig geschüttelt und gedreht werden, damit eine homogene Suspension entsteht. Das Tröpfchen wird jedesmal so gut wie möglich gleich groß genommen, damit einigermaßen Vergleichswerte entstehen.

Mit Kreutztischbewegung durchsucht man das Präparat systematisch bei 300 bis 500-facher Vergrößerung und verzeichnet jeden Befund. Es entstehen also ähnliche Zählprotokolle wie bei der Moor-Pollenanalyse.

Profile.

Die vier Beispiele (Fig. 1, I—IV) beziehen sich auf Heideprofile des Diluvialplateaus in den Provinzen Drente und Friesland¹⁾.

Profil I wurde einem Flugsandgebiete in der Nähe von Anholt (Gem. Ruinen) entnommen. Es ist ein schönes Beispiel der Akkumulations-Profile. Von oben nach unten sieht man (Fig. 1):

- Probe 1—10, rezente Flugsandschichten von schmutzig-blassgelber Farbe mit grauen Streifen;
- Probe 11—14, eine zuerst dunkelgraue, dann hell bleigraue bis fast weisse Schicht (sog. „Bleichsandschicht“). Direkt darunter:
- Probe 15—17, eine ganz scharf markierte kaffeebraune bis fast schwarze, sog. „Humusortsteinschicht“, mit tiefen Auszackungen;
- Probe 18—23, hellgelben bis braunen Sand, marmorähnlich geädert;
- Probe 24—27, wieder eine Bleichsandschicht und
- Probe 28—30, eine schwere und harte Humusortsteinschicht;
- Probe 31—32, hellgelben bis braunen Sand, ebenfalls stark geädert;
- Probe 33—35, groben, fluviatilen Sand (wahrscheinlich ward das alte Bachtal hier durch Flugsand abgesperrt und das Wasser aufgestaut (siehe: Chromotopographische Karte, nr. 239, alte Ausgabe von 1900, $\frac{1}{2}$ km. S. O. v. Anholt).
- 3.40—3.50 m., weissen, sehr feinen lehmigen Sand.
- 3.50—?, Geschiebelehm des Riss-Glazials.

¹⁾ Es sind feinkörnige, saure Sande ohne Regenwurm-Tätigkeit!

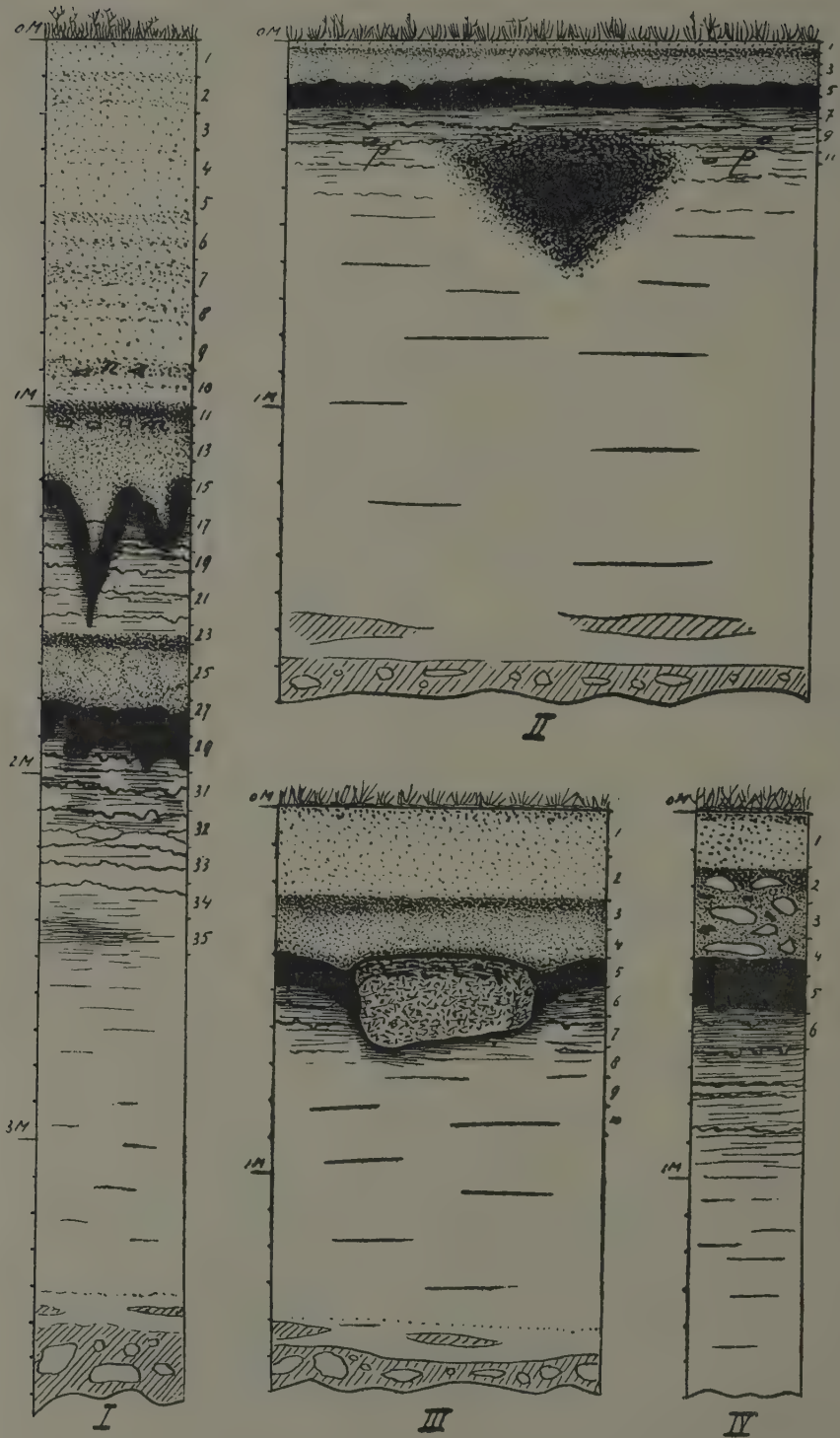


Fig. 1.

Es handelt sich also um ein stark ausgeprägtes Akkumulationsprofil mit zwei Humusortsteinbänken und zwei Bleichsandschichten.

Die weiteren Beispiele werden a.a.O. ausführlicher besprochen (lit. 12 u. 13).

Profil II wurde einer paläolithischen Niederlassung (Aurignacien-Kultur¹⁾), in der Nähe von Oosterwolde (Fr.) entnommen. Von oben nach unten sieht man:

- 0—3 cm. Trockentorf mit rezentem Flugsand;
- 3—12 cm. graue, Bleichsand enthaltende Schicht;
- 12—20 cm. dunkelbraune Humusortsteinschicht; darunter:
- 20—30 cm. hellgelben bis braunen Sand, geädert. Auf 27—33 cm. Tiefe war der Fund-Niveau der Silex-Artefakte;
- 30—150 cm. blassgelben Sand, sodann feinen weissen Sand und Geschiebelehm. Das dunkle Dreieck ist eine der vielen fossilen Feuerstätten.

Profil III und IV beziehen sich auf Lokalitäten in der Nähe der Dörfern Steenberg und Norg in Nd.-Drente. Es wurden hier Erratica in situ aufgefunden in und über der Humusortsteinschicht. Auch hier war die Folge der Schichten:

- Proben 1 und 2 von III und 1 von IV, rezenter Flugsand von blassgelber Farbe;
- Proben 3 u. 4 v. III und 2, 3, 4 (halb) v. IV, graue Schicht, bleichsandartig, jedoch mit Erratica!—;
- Proben 5 u. 6 v. III und 5 u. 6 von IV, Humusortsteinschicht, darunter gelber bis brauner, geädert Sand. Danach folgt wieder hellgelber Sand, weisser Sand und Geschiebelehm.

Vorbetrachtung.

Man kann im post-Rissglazialen Schema folgende fünf Abteilungen unterscheiden (siehe Fig. 2):

- a. Als Liegendes: der Geschiebelehm des Riss-Glazials (die Grundmoraine), sowie sofort darauf gelagerte fluvioglaziale Sedimente;
- b. Die Abteilung der folgenden Übergangszeit (arktisch-boreal, vielleicht auch Tundra) schraffiert;
- c. Das Riss-Würm Interglazial, schwarz;
- d. Das Würm-Glazial, punktiert; m. mindestens 2 Tundrapperioden (Lit. 2 u. 4);
- e. Das Post-Glazial, weisz.

Figur 2 zeigt nun die 15 theoretisch möglichen Lagerungsverhältnisse dieser Abteilungen, welche z. B. durch Windwirkungen entstanden sein können. Bei den äolischen Profilen haben wir uns also immer diese Möglichkeiten zu vergegenwärtigen. Ausserdem kann jede Abteilung für sich noch mehr oder weniger erodiert sein.

¹⁾ Nach Aussage auf typologischen Gründen von H. J. POPPING veröffentlicht (lit. 12).

Hieraus geht hervor wie schwer es ist jeden einzelnen Fall zu verstehen ohne ein Mittel, diese Schichten-Komplexe scharf zu analysieren und danach die Abteilungen zu identifizieren.

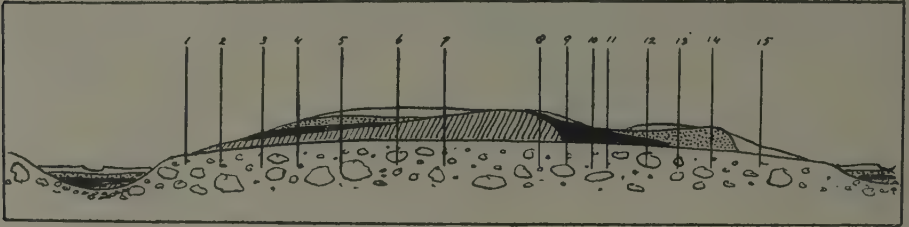


Fig. 2.

Nun haben mir meine Untersuchungen wenigstens Aussichte geliefert, welche es vielleicht in der Zukunft ermöglichen werden tatsächlich diese fünf Abteilungen und möglicherweise auch noch Teile davon zu unterscheiden mit Hilfe der Mikrofossilien. Ein erster Versuch ist hier gemacht worden.

Resultate (kurz zusammengefasst).

1. Die äolischen Sedimente der feinkörnigen Diluvialsande¹⁾ enthalten im Nordosten unseres Landes eine ausreichende Zahl von Mikrofossilien, — in bestimmten Schichten sogar mehr als die meisten Moorschichten.

2. Damit werden systematische Serien-Analysen ermöglicht. Man wähle dabei für niedrigere Schichten-Komplexe die Höhe der Proben-schichten möglichst klein (z.B. 1—3 cm.). Für höhere Akkumulations-schichten werden Proben von 5—10 cm. Höhe ausreichen.

3. Die Humusortsteinschichten wurden in den untersuchten Profilen jedesmal als Tundrabänke erkannt (Selaginella-Mikrosporen; Anhäufungen von Laubmoossporen; Moosblattfetzen; das Zurücktreten bis Verschwinden von Baumpollen und Ericaceen-Tetraden; die Struktur der humöse Masse dieser Schicht (dyartig) nach der Mazeration).

Von P. E. MÜLLER wurden die Humusortsteinbänke von West-Jütland auch als Tundraschichten erkannt, auf chemisch-physikalischen u.a. Gründen. (Er benutzte die Untersuchungsergebnisse von TANFILIEF, SUKATSCHEW, NIKIFOROFF u.a., bezüglich der nordrussischen-sibirischen Fundren) (lit. 3).

4. Die oft darüber gelagerte (aber auch direkt auf Geschiebelehm und hellfärbiger Ort aufgefunden—!) sog. „Bleichsandschicht“ enthält in dem oberen Teil viele Laubholzpollen eines milden atlantischen Klimas. Diese Bleichsandschicht, sowie der ganze postglaziale Schichtenkomplex zeigen im Pollen-Spektrum typische Parallele mit dem allgemeinen Pollendiagramm, z.B. der münsterländischen Moor-Profile. (Man vergleiche dazu die Schlussfolgerungen in H. KOCHS gutbegründete Arbeit (lit. 6) mit der Tabelle I.

¹⁾ Korngrösze $< 100 \mu$: 20-mehr als 50%. Grösze der meisten Pollenkörner: 30—70 μ

TABELLE I (Anholt).

Nr.	Tiefe	Pollentetraden der Ericaceen + Empetrum	Weide (Salix)	Birke (Betula)	Erle (Alnus)	Kiefer (Pinus)	Hasel (Corylus)	Eiche (Quercus)	Linde (Tilia)	Ulm (Ulmus)	Hainbuche (Carpinus)	Buche (Fagus)	Fichte (Picea)	Cyperaceen	Gramineen	Farnsporen	Lycopodium	Selaginella	Laubmoos-Sporen	Sphagnum-Sporen	Succisa pratensis	Übrige Pollen	Nicht erkannt	Rhizopoden-Gehäuse
1	0—10 cm	217	1	7	27	2	3	3	—	—	—	—	—	8	8	1	—	—	1	2	—	17	10	24
2	10—20 „	293	—	5	39	7	—	3	—	—	—	—	—	3	7	—	—	—	2	1	—	19	5	26
3	20—30 „	270	—	1	8	2	3	1	—	—	—	—	—	4	5	—	—	—	3	1	—	7	7	34
4	30—40 „	295	1	1	13	3	1	1	—	—	—	—	—	3	4	—	—	—	1	2	—	9	10	58
5	40—50 „	390	1	3	14	4	2	—	—	—	—	—	—	2	4	1	—	—	—	1	—	10	6	32
6	50—60 „	272	1	6	22	4	2	2	—	—	—	—	—	2	9	—	—	—	1	2	—	17	5	23
7	60—70 „	132	—	4	9	1	—	—	—	—	—	—	—	2	12	1	—	—	13	2	—	7	2	26
8	70—80 „	134	1	3	16	2	—	1	—	—	—	—	—	—	2	—	1	—	11	2	—	3	3	17
9	80—90 „	153	—	2	10	4	1	2	—	1	—	2	—	4	4	—	—	—	11	3	1	2	2	44
0	90—100 „	84	3	11	19	4	6	1	1	5	3	—	—	2	3	1	—	—	9	9	—	5	7	16
1	100—105 „	625	4	9	56	4	13	11	3	25	5	10	—	—	4	3	1	—	4	15	1	10	26	—
2	105—110 „	490	1	10	101	2	14	7	—	31	11	7	—	—	2	1	—	—	2	14	—	11	14	1
3	110—115 „	485	—	13	62	10	8	4	—	8	4	3	—	2	—	—	—	—	—	15	1	6	8	3
4	115—120 „	225	1	4	42	7	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6	1	1	5	—
5	120—125 „	116	1	3	17	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1	8	4	—	4	5	3
6	125—130 „	280	1	2	9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6	1	—	5	3	—
7	130—135 „	128	3	5	13	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	11	7	—	5	2	4
8	135—140 „	9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	1	—	2	—	1
9	140—145 „	158	—	4	24	3	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	15	—	2	8	3
0	145—150 „	62	—	2	15	1	4	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	13	5	—	7	3	1
1	150—155 „	22	1	3	9	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	2	—	1	2	—
2	155—160 „	82	—	3	32	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	2	—	1	6	—
3	160—165 „	315	—	—	156	12	24	—	—	9	4	—	2	—	1	2	—	—	2	5	—	3	27	—
4	165—170 „	296	1	12	112	7	27	—	—	12	6	2	—	—	—	31	—	—	—	18	4	6	21	—
5	170—175 „	73	—	1	26	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	9	—	—	1	6	—	—	6	1
6	175—180 „	11	—	1	4	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	2	—	—	2	2
7	180—185 „	4	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1	—	1	1	3	—
8	185—190 „	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1	1
9	190—195 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	28	—	—	—	—	—
0	195—200 „	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	—	—	—	2	—
1	200—210 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	13	2	—	—	2	—
2	210—220 „	5	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	1	—	6	—	—	3	2	—	—	4	—
3	220—230 „	10	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	16	—	—	9	18	—	—	7	—
4	230—240 „	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	14	—	—	14	16	—	—	2	—
5	240—250 „	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	19	—	—	2	23	—	1	2	1

TABELLE II (Oosterwolde, A)

Nr.	Tiefe	Pollentraden d. Eric. + Empetr.	Weide (Salix)	Birke (Betula)	Kiefer (Pinus)	Hasel (Corylus)	Erle (Alnus)	Eiche (Quercus)	Linde (Tilia)	H. Buche (Carpinus)	Buche (Fagus)	Sphagnum-Sp.	Laubmoos-Sp.	Nicht erkannt	Rhizopoden	Succisa prat.	Polypodium	Anthyrium	Gramineen	Cyperaceen	Compositen	Stellaria
1	0 — 3 cm	155	—	13	3	1	16	4	—	—	—	8	1	29	6	—	—	—	1	1	—	1
2	3 — 6 „	245	—	2	1	1	5	9	—	—	—	3	3	4	4	—	1	1	7	—	3	1
3	6 — 9 „	105	—	2	—	2	4	2	—	—	2	2	—	3	8	1	—	—	3	—	—	—
4	9 — 12 „	27	—	3	—	1	5	5	—	3	2	1	1	11	30	1	—	—	—	—	—	—
5	12 — 15 „	12	—	—	—	—	2	—	—	—	—	2	12	—	21	—	—	—	—	—	—	—
6	15 — 18 „	—	2	1	1	—	—	—	—	—	—	—	66	5	32	—	—	—	—	—	—	—
7	18 — 21 „	3	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	79	4	12	—	—	—	—	—	—	—
8	21 — 24 „	7	—	2	4	—	—	—	—	—	—	—	36	3	4	—	—	—	—	—	—	—
9	24 — 27 „	22	1	1	—	—	—	—	2	—	—	1	23	5	2	2	—	—	—	1	1	—
10	27 — 30 „	4	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	4	1	2	—	—	—	—	—	—	—
11	30 — 33 „	—	—	3	2	1	—	17	—	—	—	2	2	3	—	—	—	—	—	—	—	—

TABELLE III (Oosterwolde, B)

[illegible]

TABELLE IV (Steenbergen)

Nr.	Tiefe	Pollentetraden Eric. + Empetr.	Weide (Salix)	Birke (Betula)	Erle (Alnus)	Hasel (Corylus)	Kiefer (Pinus)	Eiche (Quercus)	Linde (Tilia)	Carpinus	Buche (Fagus)	Selaginella	Farn-Sporen	Sphagnum-Sp.	Laubmoos-Sp.	Gramineen	Cyperaceen	Lichenes ?	Andere Pollen	Nicht erkannt	Rhizopoden
1	0—12 cm	119	1	6	2	1	5	2	—	—	—	—	—	3	4	10	4	—	4	17	49
2	12—24 „	52	—	2	9	1	—	2	—	—	—	—	2	1	2	4	3	—	—	9	31
3	24—32 „	254	—	61	26	6	2	1	—	—	—	—	—	3	7	—	1	—	—	29	—
4	32—40 „	198	—	12	28	2	2	2	5	1	1	—	—	1	—	—	—	—	—	16	4
5	40—48 „	18	—	5	1	—	—	—	1	—	—	8	—	—	34	—	—	97	—	2	—
6	48—56 „	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	6	—	—	—
7	56—64 „	8	—	—	—	1	—	2	—	—	—	—	—	3	1	—	—	—	—	—	—
8	64—72 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—
9	72—80 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	80—88 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	88—98 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
12	98—108 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1 cm ü. d. Stein		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	32	—	—	—	—	—	290	1	3	1
1 cm u. d. Stein		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	15	—	—	—	—	1	—

TABELLE V (Norg)

Nr.	Tiefe	Pollentetraden d. Ericaceen + Empetr.	Birke (Betula)	Erle (Alnus)	Hasel (Corylus)	Kiefer (Pinus)	Eiche (Quercus)	Gramineen	Cyperaceen	Farn-Sporen	Selaginella	Sphagnum-Sporen	Laubmoos-Sporen	Lichenen-Sp. ?	Nicht erkannt	Rhizopoden
1	0—15 cm	27	1	—	1	2	1	6	1	—	—	—	1	—	7	22
2	15—25 „	14	1	2	—	—	1	—	—	1	—	1	4	35	3	2
3	25—35 „	2	—	—	—	—	—	—	—	2	6	—	1	50	4	5
4	35—45 „	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	47	—	1	—
5	45—55 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6	—	—	—
6	55—65 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	12	—	—	—

Feuchte Periode; Bodenverfestigung durch die Vegetation; also wenig Flugsandbildungen! Die Wurzelschicht über der Tundrabank war nur sehr dünn, die übrigen Wachstumsfaktoren günstig. Diese Bleichsandschicht

musz also eine äusserst langsam „gewachsene“ Schicht eines feuchten milden Klimas sein — Deshalb die starke Auslaugung des Sandes.

5. Das Profil von Anholt wurde zuletzt und etwas eingehender untersucht. Die Resultate sind versuchsweise und vorläufig im Quartairschema interpretiert worden.

Dabei stellte sich heraus:

a. dasz die obere Bleichsandschicht (Proben 11—14) das Atlantikum des Blytt-Sernanderschen Schemas enthält. Buche, Hainbuche, Ulme, Linde, Eiche; mesolithische (Tardenois) Artefakte wurden in dieser Schicht aufgefunden (Fig. 1, I, m), während spät neolithische (evtl. frühbronzezeitliche-) Pfeilspitzen mit Dorn und Zacken, sowie Keramik ein wenig höher, über der Bleichsandschicht angetroffen wurden (Fig. 1, I, n);

b. dasz die obere Humusortsteinschicht (Proben 16—18) wahrscheinlich der letzten Tundra-Periode des Würm-Glazials angehört (Selaginella, Moossporen, Moosblattfetzen) ¹⁾;

c. dasz die untere Bleichsandschicht (Proben 23 u. 24) ein Interstadial, nach dem Rückzug des ersten Hauptvorstoszes des Würm-Glazials angehört (Auftreten z.B. von: Fichte, Buche, Hainbuche und Ulme! —);

d. dasz die untere Humusortsteinbank (Proben 28—31) während des ersten Hauptvorstoszes des Würm-Glazials ausgebildet wurde;

(Die Profile II—IV wurden a.a.O. besprochen (lit. 12 u. 13). Sie werden hier nur als Beispiele erwähnt. Die Schichtdicke der Proben war bei den Profilen III und IV (Tabellen IV u. V) zu gross genommen).

Damit meine ich gezeigt zu haben, dasz „Pollenanalysen“ dieser Sedimente möglich sind und bedeutungsvoll werden können für die post-Rissglaziale Florengeschichte und -Stratigraphie. Es mögen diese Beispiele und Resultate zur Nachprüfung und Weiterarbeit anregen!

LITERATUR.

1. 1911. N. SUCKATSCHEW, L'influence de la congélation perpétuelle sur le sol (Bull. de l'Acad. imp. d. Sciences de St. Peterbourg, T. V).
2. 1924. W. KÖPPEN u. A. WEGENER, Die Klimate der geologischen Vorzeit (Berlin, 1924).
3. 1924. P. E. MÜLLER, Bidrag til de Jydske Hedesletters Naturhistorie (mit Résumé: Etudes à l'histoire naturelle du sol des landes à bruyère du Jutland, recherches pédologiques (Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Biol. Medd. IV, 2). Mit wichtigen Literaturangaben.
4. 1925. W. SOERGEL, Die Gliederung und absolute Zeitrechnung des Eiszeitalters (Fortschr. d. Geol. u. Palaeontol., H. 13, 1925).
5. 1929. K. VON BÜLOW, Die Bedeutung mikrofloristischer Methoden für die Quartairgeologie (Sitz. Ber. Preusz. Geol. Landes Anstalt, Heft 4).
6. 1929. H. KOCH, Paläobotanische Untersuchungen einiger Moore des Münsterlandes (Beih. d. Bot. Centralbl., Bd. XLVI, Abt. II).

¹⁾ Der dritte Hauptvorstosz (Bühl-Stadium) war hier wahrscheinlich nicht kalt genug zur Ausbildung einer Tundrabank. (Cf. die Kurve der Solarkonstante-Schwankungen während des Diluviums von MILANKOWITSCH-KÖPPEN-WEGENER in Lit. 2).

7. 1930. W. BEIJERINCK, Over stuifmeelkorrels en sporen in humushoudende lagen onzer zandgronden (De Lev. Natuur, jrg. 35).
8. 1930. K. VON BÜLOW, Vergleichende Tabelle zur Stratigraphie des deutschen Alluviums (Handb. d. vergl. Stratigraphie, Bd. Alluvium).
9. 1931. K. VON BÜLOW, Ein präborealer Fichten-Vorstosz in der Mark Brandenburg ? (Abh. Preusz. Geol. Landesanstalt).
10. 1932. J. ANDREE, Beiträge zur Kenntnis des norddeutschen Paläolithikums und Mesolithikums. (Mannus Bibl. nr. 52.)
11. 1932. W. BEIJERINCK, De Ligging der Steentijd-resten in Midden-Drente. (Tijdschr. Kon. Nederl. Aardr. Gen., Dl. XLIX).
12. 1933. W. BEIJERINCK en H. J. POPPING, Eene palaeolithische nederzetting aan het Kuinderdal nabij Oosterwolde (Fr.) (M. Zusammenfassung) (Tijdschr. Kon. Nederl. Aardr. Gen., Dl. XLX).
13. 1931. W. BEIJERINCK, Erratica des Würm-Glazials in den Niederlanden (Proc. Kon. Akad. v. Wetensch. 1933).

Biologisch Station Wijster (Dr.), Holland.

27 Dezember 1932.

Geology. — *Erratica des Würm-Glazials in den Niederlanden.* Von W. BEIJERINCK. (Communicated by Prof. L. RUTTEN.)

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

In der Nähe des Dorfes Steenberg¹⁾ im Norden der Provinz Drente, wurde, in einem Abgrabungsprofil, der auf Fig. 3 in situ photographierte, rätselhaft im Sande steckende Steinblock aufgefunden. Schon beim ersten Anblick machte er den Eindruck eines durch die Humusortsteinschicht (Fig. 3, T) allmählich tiefer gesunkenen Findlings.

Der ziemlich grobkörnige Granitblock hatte eine grösste Länge von 57 cm. während die grösste Breite und Höhe 45 und 25 cm. betrugen. Die Oberseite des Steines, bis ca. 5 cm. Tiefe, war sehr stark verwittert (Fig. 3, a), während die sonstige Oberfläche gut glatt und frisch aussah.

Das Profil wurde von mir pollen-analytisch untersucht nach demselben Verfahren, wie ich es seit 1930 zum Studium der post-Rissglazialen äolischen Sedimente durchgeführt habe.

Die Musterserie ist auf dem Bilde mit weisser Tinte eingezeichnet. Die Muster 1 und 2 bestehen aus rezentem Flugsand. Dann folgen zwei Muster der grauen, sog. „Bleichsand“-enthaltenden Schicht, mit hohen Ericaceen-Zahlen (Pollen-Tetraden). Schicht 4 enthielt ziemlich viel Linden-Pollen, sowie einzelne von Eiche, Hainbuche und Buche. Damit können wir diese Abteilung ins Subboreal-Subatlantikum des Post-Glazials stellen. Das Pollen-Spektrum dieser Heide-Profile zeigt bisweilen typische Parallele mit den postglazialen Moorprofil-Spektren dieser Breite, was nur zu verstehen ist durch Annahme einer äusserst langsamen Erhöhung

¹⁾ 1300 M. nordöstlich des Dorfes, unmittelbar an der Ostseite der Landstrasse nach Roden.

TABELLE I (Steenbergen)

Nr.	Tiefe	Pollentetraden Eric. + Empetr.	Weide (Salix)	Birke (Betula)	Erle (Alnus)	Hasel (Corylus)	Kiefer (Pinus)	Eiche (Quercus)	Linde (Tilia)	Carpinus	Buche (Fagus)	Selaginella	Farn-Sporen	Sphagnum-Sp.	Laubmoos-Sp.	Gramineen	Cyperaceen	Lichenes ?	Andere Pollen	Nicht erkannt	Rhizopoden
1	0—12 cm	119	1	6	2	1	5	2	—	—	—	—	—	3	4	10	4	—	4	17	49
2	12—24 „	52	—	2	9	1	—	2	—	—	—	—	2	1	2	4	3	—	—	9	31
3	24—32 „	254	—	61	26	6	2	1	—	—	—	—	—	3	7	—	1	—	—	29	—
4	32—40 „	198	—	12	28	2	2	2	5	1	1	—	—	1	—	—	—	—	—	16	4
5	40—48 „	18	—	5	1	—	—	—	1	—	—	8	—	—	34	—	—	97	—	2	—
6	48—56 „	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	6	—	—	—
7	56—64 „	8	—	—	—	1	—	2	—	—	—	—	—	3	1	—	—	—	—	—	—
8	64—72 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—
9	72—80 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	80—88 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	88—98 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
12	98—108 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1 cm ü. d. Stein		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	32	—	—	—	—	—	290	1	3	1
1 cm u. d. Stein		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	15	—	—	—	—	1	—

TABELLE II (Norg)

Nr.	Tiefe	Pollentetraden d. Ericaceen + Empetr.	Birke (Betula)	Erle (Alnus)	Hasel (Corylus)	Kiefer (Pinus)	Eiche (Quercus)	Gramineen	Cyperaceen	Farn-Sporen	Selaginella	Sphagnum-Sporen	Laubmoos-Sporen	Lichenen Sp. ?	Nicht erkannt	Rhizopoden
1	0 — 15 cm	27	1	—	1	2	1	6	1	—	—	—	1	—	7	22
2	15 — 25 „	14	1	2	—	—	1	—	—	1	—	1	4	35	3	2
3	25 — 35 „	2	—	—	—	—	—	—	—	2	6	—	1	50	4	5
4	35 — 45 „	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	47	—	1	—
5	45 — 55 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6	—	—	—
6	55 — 65 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	12	—	—	—

der Oberfläche durch atmosphärischen Staub und Sandkörner während Millenniumen.

Die Proben 5 und 6 gehören schon der Humusortsteinbank an; es waren darin die Ericaceen-Pollen zu einem Minimum vertreten, während Moossporen vom Hypnum-Typus ihr Maximum erreichten. Auch braune Lichenen(?) -Sporen mit dicker Membran und Selaginella-Sporen¹⁾ traten häufig auf. Von den Holzarten war nur die Birke ziemlich gut vertreten (arktischer Charakter). Diese Schicht wäre also als „Tundra-Bank“ zu bezeichnen.

Probe 7 enthielt ein zweites Ericaceen-Maximum mit Eiche, Hasel und Sphagnum-Sporen. In anderen Fällen fand ich meistens auch Linden-Pollen dazu. Diese Schicht halte ich vorläufig für eine Interglazialschicht des Riss-Würm-Interglazials, wenn auch die Möglichkeit besteht, dass ein Interstadial des Würm-Glazials vorliegt. Die weiteren Proben enthielten nur einzelne Moos-Sporen des Hypnum-Typus.

Ausserdem wurden zwei Muster eingesammelt aus 1 cm. dicken Schichten direkt über und direkt unter dem Stein. Unterseite und Seitenflächen des Steines waren nämlich von einer ca. 2 cm. dicken, braun gefärbten Zone eingeschlossen. Die Probe unter dem Stein lieferte reichlich Moossporen vom Hypnum-Typus und nur ganz vereinzelt Pollentetraden der Ericaceen, während die Probe direkt über dem Stein viele Lichenen(?) -Sporen und Selaginella-Sporen enthielt. Zusammengezogen lieferten diese beide Proben genau dasselbe Bild wie Schicht 5 im Profil, also der Tundra-Bank.

Diese Befunde gaben mir Anlass zu folgenden Schlüssen:

Erstens: Der Stein musz, den Mikrofossilien nach, deponiert worden sein in der korrespondierenden Schicht 5 des Profils, also mindestens 25 cm. höher als die jetzige Lage.

Zweitens. Dies geschah, aller Wahrscheinlichkeit nach, in einer Epoche, wo die Oberfläche schon im Tundra-Zustand versetzt worden war.

Drittens. Weil die Tundrabank, ebenfalls dem Pollen-Spektrum nach, zu dem Würm-Glazial gehört, kann der Steinblock nur in der (ev. einer) Abschmelzperiode des Würm-Glazials abgelagert worden sein. Durch postglaziale Erosion entstandene Gefälle, wobei Steinblöcke des Rissglazials hinuntergerollt sein könnten auf ein niedrigeres Niveau, wo die Würm-Tundrabank erhalten geblieben war, sind in dieser flachen Landschaft undenkbar: die Grundmoraine des Rissglazials liegt in der Umgegend sehr flach.

Viertens. Die stark verwitterte Oberseite deutet auf kräftige (ev. langfristige) Einwirkung der Atmosphärien und vielleicht auch der Flora (Lichenen?).

Fünftens. Ein Inland-Gletscher mit Steinschutt ist im Würm-Glazial für Holland sehr unwahrscheinlich; tatsächliche Spuren davon sind

¹⁾ Mikrosproren von Selaginella selaginoides Link. vollkommen identisch.

meines Wissens bis jetzt niemals aufgefunden. Also bleibt nur eine Möglichkeit: der Transport mit einer Eisscholle oder Eisberg.

Eine zweite merkwürdige, mit diesem Funde übereinstimmende Lokalität wurde am selben Tag von mir entdeckt und untersucht an der Landstrasse halbwegs den Dörfern Norg und Een, $4\frac{1}{2}$ km. südlich des ersten Fundortes (Fig. 1, +).

Die graue, über der Tundrabank sich befindende Schicht enthielt hier eine grosse Anzahl Gerölle und Feuersteine (Fig. 4). Dies war über min-

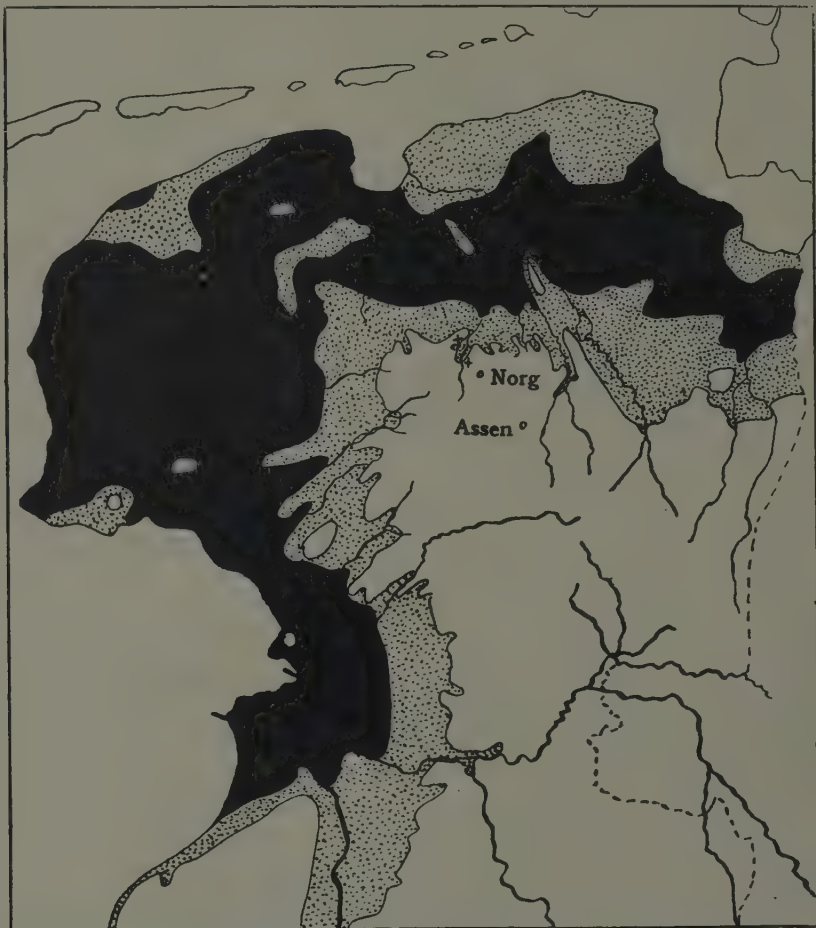


Fig. 1. Situationskarte. ++ Fundstätten. Punktiert: 1–5 m + N.A.P.
Schwarz: unter 1 m + N.A.P.

destens 50 m. im offen liegenden Profil zu verfolgen. Das Pollen-Spektrum deutete auch hier wieder den Charakter der Tundrabank an (Tabelle II, Nr. 3 u. 4). Also auch hier war eine Stelle, wo nach Ausbildung der Tundrabank in grösserem Umfange Steinschutt abgelagert worden war¹⁾. Fig. 4 zeigt eine Stelle, wo durch Regengüsse und Windwirkung die Steine

¹⁾ Unter der Bank war der Sand steinlos bis zum Lehm.

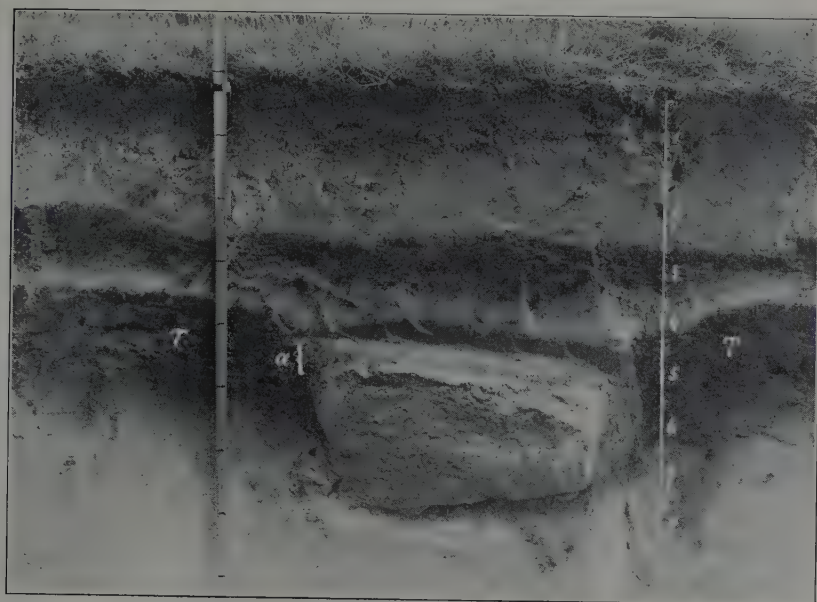


Fig. 3.

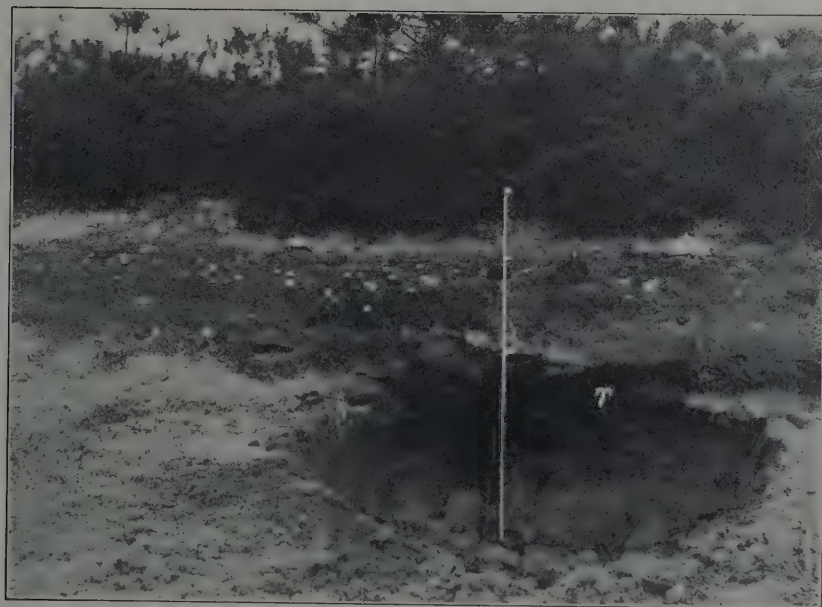


Fig. 4.

herausgerodiert am Tage liegen, so wie sie wohl einmal nach dem Abschmelzen des Eisblockes auch an der Oberfläche sich befanden. Ich erhielt den Eindruck dasz dieses Material während längeren Epochen den Einflüssen der Atmosphärien oder der Bodensäuren ausgesetzt war. Die kristallinen Gerölle, so wie der Feuersteinschutt hatten zumeist ein stark verwittertes Aussehen, auch wenn sie aus dem frisch-gestochenen Profil gezogen wurden.

Es besteht die Möglichkeit, dasz die hier besprochenen Erratica nicht über das Meer transportiert zur Stelle gelangt sind, sondern durch Hochwassertransport von Eisschollen, welche z.B. während einer Sommerabschmelzperiode von einem stromaufwärts gelegenen Ort (Talrand) während einer Überschwemmung (Flutwirkung?) vom Boden losgerissen wurden mit der daran haftenden verfrorenen Sand- und Gerölleschicht. Man vergleiche dazu unterstehende Fig. 2.

Eine eingehende qualitative und quantitative Untersuchung der Gesteinsarten vermag vielleicht Klarheit darüber zu bringen, ob es sich handelt,

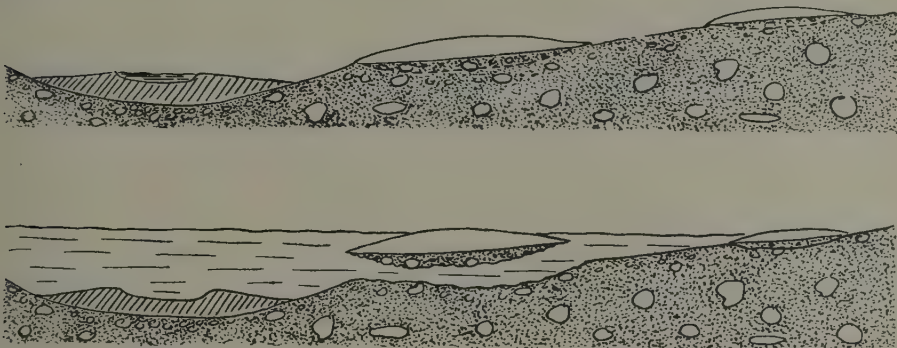


Fig. 2.

entweder um Erratica eines kalbenden Würm-Gletschers oder um rissglaziale Geschiebe auf sekundärer Lagerstätte. Jedenfalls aber musz dieser Transport in Steenbergien während der letzten Phase des Würm-Glazials stattgefunden haben, denn eine dünne arktische Schicht, sowie das Post-Glazial sind darüber gelagert.

Im Profil von Norg lag der Steinschutt verschieden hoch in der „Bleichsand“-Schicht eingebettet, während darin gar keine postglazial-atlantischen Baumpollen (Buche, Hainbuche, Ulme, Linde) aufgefunden wurden. Der Sand zeigte aber äusserlich vollkommen den Bleichsand-Typus!

Diese Tatsachen deuten, wie mir scheint, darauf hin, dasz Sand und Steinschutt zur gleichen Zeit, vór dem postglazialen Atlantikum deponiert worden sind, während der gröszere Steinblock von Steenbergien einer Eisscholle entfallen sein mag um in den anmoorigen aufgetauten Tundraboden hinein zu plumpsen.

Wijster (Dr.), 28 Dez. 1932.

Plantkunde. — *De invloed van lage temperaturen op het snelle strekken en bloeien van Convallaria majalis*. I. (Mit Zusammenfassung.) Door ANNIE M. HARTSEMA en IDA LUYTEN. (Meded. N^o. 37. van het Laboratorium voor Plantenphysiologisch Onderzoek te Wageningen). (Communicated by Prof. A. H. BLAAUW).

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

Nadat ZWEEDE (1930) de periodieke ontwikkeling van *Convallaria majalis* had onderzocht en beschreven, werden in het najaar van 1930 de eerste proeven door ons genomen over het vervroegen van den bloei van dit gewas. Hiervoor gebruikten wij de z.g. Duitsche bloeikiemen, dezelfde, die in de praktijk voor de „vroege trek” genomen worden. Er zijn bijv. te Aalsmeer slechts enkele kweekers, die zich met het „trekken” van *Convallaria* bezig houden. De methode, die deze kweekers toepassen, is in hoofdzaak dezelfde als door SPAARGAREN (1908) beschreven werd. Begin November worden de eerste partijen in de kweekbedden van de warme kassen uitgeplant. De ervaring heeft echter geleerd, dat er van deze eerste partijen betrekkelijk veel „neuzen” blijven zitten, d.w.z. niet tot strekking en bloei komen, tenzij men deze kiemen tevoren gedurende ± 7 dagen aan een lage temperatuur heeft blootgesteld. De kweekers zenden daartoe hun materiaal naar een koelhuis, waar het enkele graden beneden het vriespunt wordt bewaard. Een ander middel is de methode der warmwaterbaden, die speciaal in Duitschland door de kweekers veel wordt toegepast.

Nu hadden de onderzoekingen over den invloed van verschillende temperaturen bij *tulpen* en *hyacinthen* ons geleerd, dat voor het snel in bloei komen van deze gewassen een langdurig verblijf bij 9° resp. 13° C. noodzakelijk was. Daarom was het van belang te weten of men bij *Convallaria* iets dergelijks zou kunnen toepassen, of dat men hier werkelijk alleen met zeer lage temperaturen gedurende korten tijd de strekking kan bevorderen.

In den regel begint men in Aalsmeer reeds ± 20 September met het rooien en sorteren van *Convallaria*. Men heeft wel eens gemeend, dat mislukking bij den vroegen trek voor een deel te wijten zou zijn aan het te vroeg rooien. Om deze mogelijke fout te vermijden, verzochten wij de voor onze proeven bestemde kiemen zoo laat mogelijk te rooien. Dit geschiedde ± 20 October 1930. Op 28 October ontvingen wij de eerste zending; de voor de beide volgende zendingen (van 7 en 18 November) bestemde kiemen werden tegelijkertijd gerooid en bij den kweeker op de gebruikelijke wijze in de buitenlucht bewaard.

Op 28 October hebben wij de kiemen nog eens op het oog uitgezocht,

zoodat voor iedere proef van 40 stuks evenveel groote (8), middelmatig groote (29) en kleine (3) kiemen beschikbaar waren. Het grootste gedeelte was dus van gemiddelde grootte; maar ook de kleinsten bleken alle nog een bloemtros te bevatten. Nu werd iedere groep afzonderlijk in een ondiep houten kistje gelegd en geheel met vochtig zand bedekt. Daarna werden deze kistjes gedurende 1, 2, en 3 weken bij 8°, bij 5° en bij 1/2° C. geplaatst. Na behandeling met een dezer 3 lage temperaturen werden dus na 1, 2, en 3 weken de kiemen geplant in zeer natte turfmoel in hooge met paraffine gedrenkte houten kistjes, (22 × 24 × 19 cm.) met luchtgaten in den bodem. Daar wij alleen de gevolgen der lage temperaturen wilden vergelijken, werd verder steeds dezelfde, ook in Aalsmeer gebruikelijke, behandeling toegepast.

De kistjes met de kiemen werden nu in kweekbedden met natte turfmoel ingegraven en bedekt met een laagje Sphagnum, dat steeds goed vochtig gehouden werd. De bedden werden met passende glasramen bedekt; om het licht af te sluiten, waren deze ramen met vilt of carton bekleed. Een deel van de proeven werd in een warme kas geplaatst (luchttemperatuur 22°—23° C., geen grondverwarming), terwijl daarnaast ook koelere kassen, n.l. met luchttemperatuur van 20° en 17°, gebruikt werden. In de praktijk trekt men bij een grondtemperatuur van 20°—26° C.

Wij willen nu eerst de verdere behandeling en de resultaten van de proeven uit de warme kas bespreken. Zoodra de neuzen zoover uitgegroeid waren, dat de bloemtrossen in knop goed zichtbaar werden, brachten wij de kistjes uit de donkere kweekbedden over naar het licht. Ze werden in een ruime glazen vitrine in dezelfde warme kas geplaatst en ook nu weer in turfmoel ingegraven. Dit gebeurde meestal ± 3 weken na het planten; de tros lengte bedroeg dan gemiddeld 8 cm.; ongeveer 10 dagen later stonden de kistjes (na de juiste voorbehandelingen) in vollen bloei.

Pas als de kistjes uitgebloeid raakten, werd het resultaat zoo nauwkeurig mogelijk bepaald, waarbij wij de tot bloei gekomen trossen volgens hun stengellengte in 3 klassen rangschikten.

Zooals in het begin beschreven werd, begonnen wij onze proeven op 28 October, 7 November en 18 November (1e, 2e en 3e proevenreeks), dus met een onderling tijdsverschil van 10 dagen. In tabel 1 zien wij het resultaat van de voorbehandeling met 8°, 5° en 1/2° C. gedurende 1, 2 en 3 weken. Daarbij is in de eerste plaats aangegeven het aantal bloemtrossen, dat van de 40 tot ontwikkeling gekomen is; het aantal zeer goede trossen (1e soort) is er tusschen haakjes bij geplaatst. Verder geven wij het aantal loofbladen, dat zich ontplooid heeft bij de geslaagde bloemtrossen. In enkele gevallen vonden wij wel een loofblad maar geen bloemtros, dit hebben wij echter niet in de tabel vermeld. Tenslotte geeft de tabel het aantal kiemen, dat in het geheel geen ontwikkeling vertoonde. Bovendien kwamen in vele proeven nog gevallen voor, waarbij de spruit een eindweegs zich strekte, maar niet tot bloei kwam. Dit aantal is niet apart opgegeven, maar is gemakkelijk te vinden door de som van de bloemtrossen en de niet ontwikkelde neuzen van het totaal aantal (40) af te trekken.

TABEL I.

8° C. gedurende	Eerste proevenreeks begonnen op 28 Oct.				Tweede proevenreeks begonnen op 7 Nov.				Derde proevenreeks begonnen op 18 Nov.		
	Aantal geslaagde bloemtrossen	Aantal loofbladen	Aantal niet ontwikkelde kiemen		Aantal geslaagde bloemtrossen	Aantal loofbladen	Aantal niet ontwikkelde kiemen		Aantal geslaagde bloemtrossen	Aantal loofbladen	Aantal niet ontwikkelde kiemen
1 week	0	0	34		2 (0)	0	29		5 (4)	0	13
2 weken	1 —	0	27		10 (8)	0	7		17 (10)	0	3
3 weken	7 —	0	15		11 (7)	0	0		22 (8)	5	1
5° C. gedurende											
1 week	1 (1)	0	24		6 (4)	0	16		15 (12)	0	5
2 weken	7 (5)	0	16		13 (10)	0	6		31 (19)	1	0
3 weken	11 (3)	0	8		26 (12)	1	0		32 (18)	4	0
+ 1/2° C. gedurende											
1 week	7 —	0	25		20 (12)	1	1		29 (17)	6	1
2 weken	26 (19)	5	4		35 (22)	12	0		37 (28)	9	1
3 weken	36 (33)	11	0		33 (15)	10	1		35 (30)	21	2

Gaan wij nu in de eerste plaats na het effect van een voorbehandeling met 8° C. Hoewel de strekking en bloei na deze temperatuur in geen enkel geval gunstig genoemd kan worden, zien wij toch een groot verschil tusschen de drie opeenvolgende proevenreeksen. Bij de tweede reeks kan na 3 weken 8° weliswaar geen enkele neus „niet-ontwikkeld” worden genoemd, maar toch is het aantal geslaagde bloemtrossen bij deze voorbehandeling nog zeer klein. Beter is dit aantal bij de derde reeks, zoowel na 2 weken als na 3 weken 8° ; echter zijn pas na drie weken in deze 3e reeks ook enkele loofbladen tot ontplooiing gekomen. Wij zien dus, dat *het effect van een voorbehandeling met 8° beter is, naarmate deze temperatuur langer ingewerkt heeft, en vooral later in den tijd wordt toegepast.* Hetzelfde zullen wij opmerken bij de andere temperaturen 5° en $+ \frac{1}{2}^{\circ}$.

Na een voorbehandeling met 5° C. blijken *alle* proeven in vergelijking met 8° C. iets gunstiger uit te vallen. Het aantal bloemtrossen blijft echter in de geheele eerste proevenreeks (28 Oct.) zeer klein. Goede resultaten treden pas op na een voorbehandeling op 7 Nov. gedurende 3 weken. Hierbij komen 26 van de 40 kiemen tot bloei, waarvan er echter slechts 12 tot de 1e soort gerekend konden worden. Veel beter is het effect van 18 Nov. met 5° . Na 1 week voorbehandeling blijven slechts 5 van de 40 totaal onontwikkeld, 15 hebben bloemtrossen ontplooid, waarvan er 12 als 1e soort werden beschouwd. Na een voorbehandeling gedurende 2 en 3 weken is het aantal bloemtrossen 31 en 32 geworden, waaronder resp. 19 en 18 van de 1e soort. Het aantal loofblaadjes is ook bij deze groepen nog zeer gering.

Een veel beter effect levert de voorbehandeling met $+ \frac{1}{2}^{\circ}$ C. op: alleen bij 1 week $\frac{1}{2}^{\circ}$ C. in de eerste proevenreeks blijft nog een groot deel van de kiemen niet ontwikkeld, maar in de andere proeven is dit aantal zeer gering en wellicht eerder toe te schrijven aan andere toevallige beschadiging, dan aan de toegepaste temperatuurbehandeling.

Reeds werden na „28 Oct. 2 weken” 26 bloemtrossen gevonden, waarvan 19 eerste soort; na voorbehandeling op 7 Nov. 2 weken 35, waarvan 22 eerste soort. Een voorbehandeling gedurende 3 weken heeft steeds een zeer gunstig effect, afgezien van het opvallend kleine aantal 1e soort trossen in de 2e proevenreeks, waar wij geen verklaring voor kunnen geven. Als voorbeeld diene, dat de proef 28 Oct. 3 weken $\frac{1}{2}^{\circ}$ C. 16 Dec. in vollen bloei stond.

In het algemeen kunnen wij deze *conclusie* trekken: Bij voorbehandeling met temperaturen van 8° tot $\frac{1}{2}^{\circ}$ C. is de nawerking op strekking en bloei des te gunstiger, naarmate de koude temperatuur lager is; de behandeling kan dan tevens korter duren en over het algemeen reeds vroeger toegepast worden. Hoe vroeger men behandelt des te langer moet de koude inwerken.

Stellen wij ons bijv. tevreden met 50 % goede bloemtrossen, dan is dit te bereiken na de volgende voorbehandelingen: 28 Oct. 2 weken $+ \frac{1}{2}^{\circ}$ C.; — 7 Nov. 3 weken $+ 5^{\circ}$ of 1 week $+ \frac{1}{2}^{\circ}$ C.; — 18 Nov. 3 weken $+ 8^{\circ}$ C.

Een beter resultaat, n.l. 72—92 % goede bloemtrossen, wordt bereikt

met de voorbehandelingen: 28 Oct. 3 weken + $\frac{1}{2}^{\circ}$; — 7 Nov. 2 weken + $\frac{1}{2}^{\circ}$; 3 weken + $\frac{1}{2}^{\circ}$; — 18 Nov. 2 weken + 5° ; 3 weken + 5° ; 1 week + $\frac{1}{2}^{\circ}$; 2 weken + $\frac{1}{2}^{\circ}$; 3 weken + $\frac{1}{2}^{\circ}$ C.

Temperatuur en duur zijn dus afhankelijk van den tijd, waarop de voorbehandeling begint. Kan dit misschien berusten op een verschil in ontwikkeling van de organen op de verschillende data der drie proevenreeksen? Wij hebben daartoe bij het begin van iedere proevenreeks 10—12 kiemen van gemiddelde grootte gefixeerd en daarbij de volgende gemiddelde lengten (in millimeters) gevonden (tabel II).

TABEL II.

Datum	28 Oct. 1930	7 Nov. 1930	18 Nov. 1930	9 Nov. 1920 (uit Meded. n ^o . 29)
Lengte neus	20.94	21.67	21.42	23.28 \pm 0.53
Lengte 1 ^e loofblad	16.91	18.28	17.15	19.43 \pm 0.49
Lengte bloemtros	12.70	13.88	12.84	13.80 \pm 0.63

Wij zien uit deze cijfers, dat de gemiddelde lengte van de organen ongeveer dezelfde blijft. ZWEEDE (1930), wiens cijfers wij ter vergelijking in de laatste kolom plaatsen, (overgenomen uit tabel 1, blz. 14, fig. 3 A blz. 15) vond ook, dat in October een rustperiode intreedt, waarbij de groei van de verschillende organen geheel tot stilstand is gekomen. In het begin van deze rustperiode schijnt het nu zeer moeilijk te zijn, de planten weer tot groei te brengen: er was bij onze proeven een voorbehandeling met $\frac{1}{2}^{\circ}$ C. gedurende 3 weken voor nodig. Reeds korten tijd later, bij de op 18 November (dus 21 dagen later) begonnen proef, is een voorbehandeling met + $\frac{1}{2}^{\circ}$ C. gedurende 1 week voldoende, en kan hetzelfde effect bereikt worden met een hoogere temperatuur, n.l. 5° C. gedurende 2 weken. De invloed van de voorbehandeling met een lage temperatuur zal zeer waarschijnlijk wel een invloed op chemische omzettingen van reserve-voedsel zijn. Daarom is het ook te verwachten, dat in het tijdvak 28 October tot 18 November wel chemische veranderingen plaats vinden, die blijkbaar nog niet rechtstreeks tot uiting komen in den groei der verschillende organen, maar die wel indirekt aan den dag treden in deze trekproeven.

Wij hebben deze proeven met dezelfde voorbehandelingen behalve in 23° ook in kassen van 17° en 20° geplaatst. Wij zullen niet van al deze proeven de resultaten hier meedeelen, omdat het effect van de voorbehandelingen er weinig door beïnvloed wordt, zooals blijken kan uit tabel III van de met $\frac{1}{2}^{\circ}$ C. voorbehandelde kiemen, waarbij ter vergelijking het laatste deel van Tabel 1 herhaald wordt.

T A B E L III.

Effect van de voorbehandeling met $1/2^{\circ}$ C., gevolgd door strekking in 17° en 20° en 23°

$1/2^{\circ}$ C.	Kas	Eerste proevenreeks begonnen op 28 Oct.			Tweede proevenreeks begonnen op 7 Nov.			Derde proevenreeks begonnen op 18 Nov.		
gedurende	Tem- pera- tuur	Aantal geslaagde bloemtrossen	Aantal loofbladen	Aantal niet ontwikkelde kiemen	Aantal geslaagde bloemtrossen	Aantal loofbladen	Aantal niet ontwikkelde kiemen	Aantal geslaagde bloemtrossen	Aantal loofbladen	Aantal niet ontwikkelde kiemen
1 week	17°	3 (3)	0	36	4 (3)	0	26	16 (4)	3	3
2 weken	"	22 (13)	4	7	26 (11)	9	0	37 (18)	14	0
3 weken	"	33 (24)	12	0	32 (13)	15	0	37 (18)	28	0
1 week	20°	6 (1)	0	25	17 (7)	2	7	25 (11)	1	2
2 weken	"	23 (9)	5	0	29 (11)	4	0	36 (22)	15	0
3 weken	"	32 (17)	10	0	34 (21)	16	1	39 (20)	15	0
1 week	23°	7	0	25	20 (12)	1	1	29 (17)	6	1
2 weken	"	26 (19)	5	4	35 (22)	12	0	37 (28)	9	1
3 weken	"	36 (33)	11	0	33 (15)	10	1	35 (30)	21	2

In de met slechts 1 week $\frac{1}{2}^{\circ}$ C. voorbehandelde kiemen van de 1e en 2e proevenreeks zijn in kas 17° meer kiemen onontwikkeld gebleven dan in de warmere kassen. Ook is het procent 1e soort bloemtrossen bij het trekken in 23° in den regel gunstiger dan in lagere temperatuur. In de met 3 weken $\frac{1}{2}^{\circ}$ voorbehandelde kiemen van de derde proevenreeks is wel het aantal tot ontwikkeling gekomen loofblaadjes in kas 17° het grootst. Overigens is er zeer weinig verschil tusschen 17° , 20° en 23° , wanneer de voorbehandeling 2 of 3 weken geduurd heeft. Bij 1 week voorbehandeling verdient dus 23° (of 20°) bepaald de voorkeur boven 17° C. Daarbij dient bovendien nog in aanmerking te worden genomen, dat de strekking en het in bloei komen in 23° C. sneller gaan dan in 20° of 17° . Zoo stond proef 28 October 3 weken $+ \frac{1}{2}^{\circ}$ C. op 16 December in vollen bloei in kas 23° , maar in kas 17° pas op 10 Jan. 1931.

ZUSAMMENFASSUNG.

Der Einfluss niederer Temperaturen auf die Streckungsfähigkeit von Convallaria majalis. (Erster Teil).

Im Herbst 1930 wurden die ersten Frühtreibversuche mit *Convallarien* gemacht. Die Gärtner in Aalsmeer verwenden dazu die sogenannten deutschen „Keime“, welche zunächst einer Kältebehandlung (unter Null) während etwa 7 Tage unterworfen werden und danach sehr schnell zu treiben sind. Die in Deutschland übliche Methode der Warmwasserbäder hat denselben Zweck.

Wir erhielten unsere Keime, welche alle zur selben Zeit ausgegraben worden waren, am 28. Oktober, 7. November und 18. November aus Aalsmeer. Bei jeder dieser drei Versuchsreihen wurde resp. mit 8° , 5° und $+ \frac{1}{2}^{\circ}$ C. während 1, 2 und 3 Wochen vorbehandelt. Jeder Versuch erhielt 40 Keime. Nach der Vorbehandlung wurde die in der Praxis übliche Behandlung gegeben (Treibhaus 23° , zunächst im Dunkeln). Tabelle 1 zeigt die Resultate aller Vorbehandlungen, wobei in der ersten Spalte die Zahlen der gelungenen Blütenstände (in Klammern die der als erstklassig vermerkten), in der zweiten die Zahlen der dazu gehörigen Laubblätter, in der dritten die Zahlen der nicht entwickelten Keime angegeben werden.

Im allgemeinen ist der Effekt einer Vorbehandlungstemperatur um so günstiger, je nachdem diese länger eingewirkt hat oder später damit begonnen wurde. Je kälter die verwendete Temperatur, um so günstiger der Effekt.

72—92 % der Keime kamen zur Blüte nach den Vorbehandlungen: 28 Okt. 3 Wochen $+ \frac{1}{2}^{\circ}$; 7 Nov. 2 Wochen $+ \frac{1}{2}^{\circ}$; 3 Wochen $+ \frac{1}{2}^{\circ}$; 18 Nov. 2 Wochen $+ 5^{\circ}$; 3 Wochen $+ 5^{\circ}$; 1 Woche $+ \frac{1}{2}^{\circ}$; 2 Wochen $+ \frac{1}{2}^{\circ}$; 3 Wochen $+ \frac{1}{2}^{\circ}$.

Es sind somit Temperatur und Einwirkungsdauer von der Anfangszeit der Vorbehandlung abhängig. Um zu prüfen ob diese Abhängigkeit auf Längenunterschiede der Organe zurückzuführen wäre, dient Tabelle II,

woraus hervorgeht, dass dieses nicht der Fall sein kann. Auch ZWEEDE (1930) fand, dass in Oktober eine Ruheperiode des Wachstums eintritt. Im Anfang dieser Ruheperiode war eine Vorbehandlung mit $\frac{1}{2}^{\circ}$ C. während 3 Wochen zur Auslösung des Streckungswachstums notwendig. Es werden wahrscheinlich infolge der Kälte chemische Aenderungen eintreten, welche die Streckung der Maiblumen ermöglichen.

Tabelle III gibt auch die in kühleren Treibhäusern (17° und 20° C.) nach Vorbehandlung mit $\frac{1}{2}^{\circ}$ C. erzeugten Resultate. Im allgemeinen wirkt die Treibhaustemperatur 23° C. am günstigsten, besonders auch für die schnelle Streckung: in 23° C. stand z.B. Versuch 28. Okt. 3 Wochen $+\frac{1}{2}^{\circ}$ C. am 16. Dezember in voller Blüte, in 17° C. aber erst am 10. Januar.

Anatomy. — *Das Jochbein der Papuas.* Von J. P. KLEIWEG DE ZWAAN.
(Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS).

(Communicated at the meeting of January 28, 1933).

In der letzten Zeit ist man auch beim Studieren von Skelettmaterial, das aus dem Indischen Archipel herrührt, mehr zu Detailstudien übergegangen, wobei die einzelnen Knochenstücke des Schädels oder des Rumpfskeletts einer eingehenden Untersuchung unterworfen wurden. So studierte SCHWARZ den Kiefer und das Gebiss der Melanesier, HENCKEL den Gaumen von Papuas und Melanesiern, KEITER, GULLBERG, BURKITT und der Verfasser dieses Artikels den Unterkiefer der Papuas, GOETSCH das Tränenbein dieser Inländer. MIJSBERG untersuchte die Nähte des Gesichtsschädels und das Gebiss der Javaner, MANĀGAS die Schädelkapazität der Philippinos. Aber auch den übrigen Knochen des Eingeborenskelettes wandte sich das Interesse der Forscher in den letzten Jahren mehr zu. SITSSEN z. B. untersuchte das Becken und das Schulterblatt der malaiischen Rasse, KEUKENSCHRIJVER das Becken der javanischen Frau, VALLOIS das Schulterblatt der Negritos, BOENJAMIN das Brustbein der Javaner, MIJSBERG ihre Halswirbel und der Verfasser ihr Schlüsselbein. Weiter studierte SNELL die Form des javanischen Calcaneus, während SITSSEN das Gewicht verschiedener Skeletteile der Javaner ermittelte. Hierbei wurden nun von den genannten Untersuchern in bestimmten Hinsichten Unterschiede in der Form und den Dimensionen dieser Skeletteile bei den Inländern und Europäern festgestellt. Dann konnte und musste die Frage gestellt werden, ob diese Unterschiede der Rassenanlage als solcher zugeschrieben werden konnten oder ob sie von anderen, nicht direkt mit der Rasse zusammenhängenden Faktoren abhängig sind.

Ein Bestand von 128 Papuaschädeln in der Sammlung des Kolonial-Instituts in Amsterdam, die fast alle der Küstengegend des niederländischen Gebietes von Neu-Guinea entstammen, veranlasste mich zu dem Entschluss, das Jochbein dieser Eingeborenen zu studieren.

Zu diesem Entschluss hat vor allem eine im Jahre 1931 erschienene Abhandlung von TURO NIEMI: „Anthropologische Untersuchungen über das Jochbein der Lappen“ (Acta Instituti Anatomici Universitatis Helsinki-Helsingfors) mitgewirkt. Diese Untersuchung wurde an 180 Lappenschädeln aus dem Anthropologischen Museum der Universität zu Helsingfors angestellt. Die Lappen stellen fraglos ein Bevölkerungselement dar, das anthropologisch den Papuas sehr fern steht und sich sehr von ihnen unterscheidet. Gerade darum schien es mir denn auch interessant, bei diesen so verschiedenen Völkern das Jochbein in seiner Form und seinen Dimensionen zu vergleichen!

Bei der Bestimmung der Ausdehnungen des Jochbeines habe ich mich, ebenso wie TURO NIEMI dies tat, in Hauptsache an die Anweisungen RUDOLF MARTIN's gehalten, die dieser in seinem „Lehrbuch der Anthropologie“ gibt; doch habe ich auch noch einige andere Masse bestimmt.

Das Jochbein trägt zu einem grossen Teile zur Konfiguration des Gesichtsschädels bei und kann daher schon aus diesem Grunde anthropologische Bedeutung beanspruchen. Als Höhenausdehnungen bestimmte ich die grösste Höhe senkrecht zum Margo massetericus, die grösste Höhe, d. i. die Entfernung des höchsten Punktes der Sut. zygomaticofrontalis von dem am weitesten entfernten Punkte des Unterrandes des Jochbeins und schliesslich die Höhe des Processus temporalis senkrecht zum Margo massetericus¹⁾.

Für diese Ausdehnungen erhielt ich rechts und links folgende Werte:

	grösste Höhe \perp M. mass.		grösste Höhe		Höhe d. Proc. temp.	
	rechts	links	rechts	links	rechts	links
Mittelwert	4.66 cm	4.64 cm	4.99 cm	5.03 cm	1.45 cm	1.49 cm
Min. wert	3.5 ..	3.8 ..	3.3 ..	4.1 ..	0.9 ..	1.0 ..
Max. wert	5.6 ..	5.5 ..	5.9 ..	5.9 ..	1.8 ..	1.8 ..
	w.A. = 0.28	M = 0.025	w.A. = 0.28	M = 0.025	w.A. = 0.14	M = 0.013

Bei den Schädeln erwachsener Lappen von Personen zwischen 20—50 Jahren erhielt TURO NIEMI für diese Ausdehnungen die folgenden Werte:

	Grösste Höhe \perp M. mass.	Grösste Höhe	Höhe d. Proc. temp.
Mittelwert	4.45 cm	4.82 cm	1.33 cm
Min. wert	3.68 ..	3.90 ..	0.60 ..
Max. wert	5.34 ..	5.76 ..	1.76

¹⁾ Bei jedem Mittelwert (von rechts) ist die wahrscheinliche Abweichung (w.A.) und der mittels derselben berechnete Fehler des Mittelwertes (M.) angegeben.

Es zeigt sich also, dass die Mittelwerte aller drei Höhenmasse bei den Lappen etwas kleiner sind als bei den Papuas. Die Lappen scheinen also ein minder hohes Jochbein zu haben als die letztgenannten Eingeborenen. NIEMI fand die Höhenmasse bei den weiblichen Schädeln kleiner als die männlichen; diese Unterschiede sind indessen nur gering. Eine Vergleichung mit den Völkern, bei welchen man diese Höhe des Jochbeins bestimmt hat, lehrt Folgendes:

Japaner (HASEBE, KOGANEI)	Höhe: 4.475 cm
Böhmen (MATIEGKA)	„ : 4.45 „
Lappen (TURO NIEMI)	„ : 4.45 „
Papuas (KLEIWEG DE ZWAAN)	„ : 4.65 „

Wir sehen also, dass die Papuas die grösste Jochbeinhöhe haben. Zwischen dem rechten und linken Jochbein wurde von mir bei dieser Höhenmessung nahezu kein einziger Unterschied festgestellt.

Die grösste Jochbeinhöhe der Lappen war geringer als diejenige, welche von BARI für mehrere andere Völker angegeben wird (5,0 cm). Denselben Wert fand ich auch bei den Papua-Jochbeinen, also ebenfalls etwas grösser als bei den Lappen. Nach BARI wechselt die grösste Höhe des Jochbeins zwischen 3,9 und 6,1 cm, meistens aber zwischen 4,2 und 5,3 cm. Die grössten Werte werden bei den Sojoten, Buriaten und Chinesen gefunden, die niedrigsten bei den Abhasen, Schapsugen und Deutschen. (K. BARI: Das Jochbein. Anthropol. Journ. H. 9, 1905). Auch in bezug auf diese Höhendimension wurde von mir bei den Papuaschädeln rechts und links kein Unterschied konstatiert.

Dasselbe war der Fall betreffs der Höhe des Processus temporalis. Diese wurde bei den Papua-Jochbeinen ebenfalls etwas grösser befunden als bei den Lappen.

Die von mir bei den Papuaschädeln bestimmte Höhe des Processus temporalis erwies sich auch als grösser als diejenige der Japaner; denn für diese Höhe fand HASEBE 1,25 cm und KOGANEI 1,18 cm, während ich als Mittelwert bei den Papua-Jochbeinen 1,47 cm feststellte.

Als Breitenmasse des Jochbeins bestimmte ich zunächst die obere, mittlere und untere Breite. (R. MARTIN).

	Obere Breite		Mittlere Breite		Untere Breite	
	rechts	links	rechts	links	rechts	links
Mittelwert	4.28 cm	4.21 cm	3.68 cm	3.63 cm	3.73 cm	3.73 cm
Min. wert	3.4 „	3.5 „	3.0 „	3.0 „	2.8 „	2.9 „
Max. wert	5.2 „	5.1 „	4.4 „	4.4 „	4.6 „	4.8 „
	w.A. = 0.27	M = 0.025	w.A. = 0.25	M = 0.023	w.A. = 0.27	M = 0.025

Es zeigt sich also, dass auch in diesen Breitenausdehnungen kaum irgend

ein Unterschied zwischen rechts und links besteht. TURO NIEMI fand bei den Jochbeinen erwachsener Lappen als obere Breite im Mittel 4,34 cm, für die mittlere Breite 2,96 cm und für die untere 3,22 cm. Die mittlere und untere Breite waren somit bei den Lappenjochbeinen kleiner als bei den Papuas, dagegen die obere Breite etwas, aber nur sehr wenig grösser als bei den letzteren. Nach NIEMI ist die obere Breite der Jochbeine bei den Schädeln männlicher Lappen grösser als diejenige weiblicher Personen.

Vergleichen wir nun die obere Jochbeinbreite dieser Schädel mit derjenigen einiger anderer Völker, bei denen diesbezügliche Messungen vorgenommen wurden, dann finden wir nachstehende Ziffern:

Japaner (HASEBE, KOGANEI)	obere Breite: 4.34 cm
Böhmen (MATIEGKA)	" " : 4.28 "
Lappen (TURO NIEMI)	" " : 4.34 "
Papuas (KLEIWEG DE ZWAAN)	" " : 4.24 "

Diese Ausdehnung wurde also bei den Papuas am kleinsten befunden; jedoch sind die Unterschiede nur sehr gering.

Was die mittlere Jochbeinbreite anbelangt, konstatierte TURO NIEMI ebenfalls bei den männlichen Lappenschädeln grössere Werte als bei den weiblichen. Bei Vergleichung mit den schon vorstehend genannten Völkern ergeben sich für die mittlere Breite folgende Zahlen:

Japaner (HASEBE, KOGANEI)	mittlere Breite: 2.83 cm
Böhmen (MATIEGKA)	" " : 2.89 "
Lappen (TURO NIEMI)	" " : 2.96 "
Papuas (KLEIWEG DE ZWAAN)	" " : 3.66 "

Die mittlere Jochbeinbreite erwies sich also im Gegensatz zur oberen Breite bei den Papuas gerade als am grössten.

Für die untere Jochbeinbreite ergaben sich nach NIEMI auch wieder bei den Schädeln männlicher Lappen grössere Werte als bei den weiblichen Schädeln.

Bei Vergleichung mit den vorgenannten Völkern ergibt sich für die untere Breite folgendes Bild:

Japaner (HASEBE, KOGANEI)	untere Breite: 3.12 cm
Böhmen (MATIEGKA)	" " : 3.24 "
Lappen (TURO NIEMI)	" " : 3.22 "
Papuas (KLEIWEG DE ZWAAN)	" " : 3.73 "

Es zeigt sich, dass auch diese Breitenausdehnung bei den Papuaschädeln am grössten ist.

Ausser den genannten Breitendimensionen bestimmte ich noch die grösste Breite und die sog. MATIEGKAsche Breite.

Die grösste Breite ist die Entfernung des unteren Endes der Sut. zygomaticotemporalis von dem Punkte, wo die Sut. zygomaticomaxillaris den

Unterrand der Orbita erreicht. Die MATIEGKASche Breite ist der mittlere Wert der oberen, mittleren und unteren Breite.

	Grösste Breite		MATIEGKASche Breite	
	rechts	links	rechts	links
Mittelwert	5.45 cm	5.44 cm	3.89 cm	3.85 cm
Min.wert	4.6 "	4.4 "	3.2 "	3.2 "
Max.wert	6.5 "	6.3 "	4.4 "	4.6 "
	w.A. = 0.32	M = 0.029	w.A. = 0.22	M = 0.020

Wir sehen mithin, dass auch bezüglich dieser beiden Breitenwerte kaum ein Unterschied zwischen rechts und links besteht.

Bei den männlichen Lappenschädeln fand TURO NIEMI die grösste Breite auch wieder grösser als bei den weiblichen Schädeln. Für alle erwachsenen Lappenschädel zusammen konstatierte er als mittlere grösste Breite 5,18 cm., also einen kleineren Wert, wie er von mir bei den Papuaschädeln festgestellt wurde. BARI fand ebenfalls bei dem von ihm untersuchten Material einen grösseren Wert, nämlich 5,40 cm. einen Durchschnitt also, der dem von mir bei den Papuajochbeinen bestimmten entspricht.

Nach RUDOLF MARTIN ist bei den meisten Menschen das Jochbein breiter als hoch. Dies wurde auch von NIEMI bei den Lappen beobachtet und ebenfalls von mir bei den Papuaschädeln konstatiert; denn als grösste Höhe des Jochbeins fand ich bei den Papuas 5.01 cm. und als grösste Breite durchschnittlich 5.45 cm. Bei der Bestimmung des Index kommt das Verhältnis zwischen der grössten Jochbeinbreite und der grössten Höhe näher zum Ausdruck. Ich fand nämlich als Prozentverhältnis zwischen der grössten Breite und der grössten Höhe bei den Papuajochbeinen rechts im Mittel 88,2 und links 92,6 (im Durchschnitt 90,4, mit einer wahrscheinlichen Abweichung von ca. 5,9; $M=0,53$). Rechts fand ich nur bei 16,9 % der Schädel die Höhe grösser oder ebensogross als die Breite; links war dies bei 17,7 % der Schädel der Fall, sodass auch in dieser Hinsicht kaum ein Unterschied zwischen rechts und links zu konstatieren war. Als MATIEGKASchen Index, d.i. das Prozentverhältnis der MATIEGKASchen Breite und der senkrecht zum Margo massetericus stehenden Höhe fand ich rechts im Durchschnitt 84,09 (Minimum 67,35; Maximum 108,57) und links 83,60 (wahrscheinliche Abweichung = 5; $M=0,47$), mit Mindest- und Höchstwert von bezw. 65,45 und 104,76. MATIEGKA hat für diesen Index als Durchschnitt 78 gefunden (J. MATIEGKA: Über das „Os malare bipartitum“. Anatomischer Anzeiger 1899). Von TURO NIEMI wurde bei den Lappen ein Mittelwert von nur 71,2 bestimmt, also ein viel niedrigerer Wert als ich diesen für die Papuas feststellte.

Lappen	Papuas
MATIEGKAsche Breite . . . 3.174 cm	MATIEGKAsche Breite . . . 3.87 cm
Höhe \perp Margo Masset. . . 4.45 „	Höhe \perp Margo masset. . . 4.65 „
MATIEGKAscher Index . . . 71.2 „	MATIEGKAscher Index . . . 83.60 „

Der Index ist bei den Papuas erheblich grösser als bei den Lappen, trotz des Umstandes, dass die Höhe senkrecht zum Margo massetericus bei den ersteren etwas grösser als bei den Lappen ist. Der grössere Index der Papuas wird demnach ausschliesslich durch die soviel grössere MATIEGKAbreite bei diesen Inländern verursacht.

Von MATIEGKA wurde berechnet, dass der Index für das völlig geteilte Os zygomaticum bipartitum nur 55,6 beträgt. Es wäre also möglich, dass der ziemlich kleine Index der Lappenschädel darauf beruht, dass an letzteren ziemlich viele Nahtreste vorkommen, die bewirken, dass das Jochbein höher und schmaler wird. Doch zeigte sich, dass dies nicht der Fall ist. In Zusammenhang hiermit sei bemerkt, dass ich bei den Papuajochbeinen weder rechts noch links ein vollständiges Os bipartitum konstatierte, sei es mit einer wagerechten oder mit einer senkrechten Naht und ebenso wenig ein Os zygomaticum tripartitum. Ein Os zygomaticum bi-oder tripartitum kommt auch bei europäischen Schädeln selten vor. Man hat ein solches Jochbein bei 5000 europäischen Schädeln insgesamt nur bei 0,3 % wahrgenommen. Dagegen sollen derartige Jochbeine bei den Japanern und Ainos häufiger angetroffen werden. Bei 974 japanischen Schädeln fand man ein solches Jochbein in einem Prozentsatz von 3,2 %. TURO NIEMI traf auch unter seinen Lappenschädeln kein einziges völlig geteiltes Jochbein an.

Eine von der Sut. zygomaticotemporalis nach vorn verlaufende Incisura posterior fand ich rechts bei 3,9 % der Papuaschädel, links bei nur 1,6 %. Dagegen bemerkte ich eine von der Sut. zygomaticomaxillaris nach hinten verlaufende Incisura anterior weder rechts noch links bei keinem einzigen Papuaschädel. Nach RUDOLF MARTIN tritt die Incisura anterior oder posterior gewöhnlich bilateral auf. Ich fand bei nur einem der beiden Schädel, an welchen links eine Incisura posterior vorkam, diese Naht auch rechts, während bei den 5 Schädeln, wo rechts eine solche Naht angetroffen wurde, nur bei einem Schädel dies auch links der Fall war. Bei 4 von den 5 Schädeln, wo diese Naht rechts angetroffen wurde, kam sie also nur unilateral vor. Dieser Befund entspricht also nicht der Angabe RUDOLF MARTIN's!

Ebenso wie von mir bei den Papuaschädeln festgestellt wurde, so fand auch TURO NIEMI bei den Lappenschädeln ausschliesslich eine Naht an der Hinterseite des Jochbeins, also eine Incisura posterior und keine einzige Incisura anterior. Er traf erstgenannte Naht bei 11,8 % seiner Schädel an,

also in einem viel grösseren Prozentsatz, als von mir bei den Papuaschädeln bestimmt wurde. Nach TURO NIEMI kommt diese Naht am häufigsten bei der Adultusklasse vor, während sie bei der Senilisklasse ganz fehlt. Von MEYER wurde bei deutschen Schädeln ein Prozentsatz von 3,9 gefunden, ein ebensogrosser Satz, wie ich ihn rechts bei den Papuaschädeln feststellte, und bei russischen Schädeln ein Prozentsatz von 7,7.

TARENETZKY fand bei russischen Schädeln einen Prozentsatz von 6,7 und bei finnischen einen solchen von 5,5. DE LORENZI gibt für italienische Schädel 10 % an. In dem Aufsätze TURO NIEMI's fand ich eine Tabelle, welche die Prozentsätze wiedergibt, in welchen die Incisura posterior bei verschiedenen Völkern gefunden wurde.

Diese Prozentsätze weichen sehr von einander ab! Auffallend sind vor allem die hohen Prozentsätze, die für die Ainos angegeben werden, wobei freilich auch auffällt, dass die von LE DOUBLE angegebene Prozentzahl (100,0 %) fast doppelt so gross ist wie diejenige, welche KOGANEI feststellte (52,8 %). Unter den europäischen Völkern soll eine Incisura posterior am häufigsten bei den Lappen vorkommen. Nach TURO NIEMI soll diese Tatsache darauf hindeuten können, dass das Jochbein der Lappen eine primitivere Entwicklung aufweist als dasjenige der anderen europäischen Völker, bei denen dieser Kopfknochen untersucht wurde. Bei etwa 75 % der nicht europäischen Völker, bei denen das Jochbein auf diese Inzisur hin inspiziert wurde, ward sie aber noch häufiger angetroffen als bei den Lappen. Der Prozentsatz, den ich für die Papuaschädel feststellte, gehört zu den sehr niedrigen. Merkwürdig ist es jedenfalls, dass diese Prozentsätze der Papuas nahezu mit denjenigen der Neubretagner (3,1 %) und Australier (3,8 %) übereinstimmen, welchen Völkern die Papuas anthropologisch zweifelsohne sehr nahe stehen!

Die Incisura anterior ist auch bei anderen Völkern viel seltener wahrgenommen worden als die hintere Inzisur. Ebenso wie NIEMI bei seinen Lappenschädeln, konnte ich bei meinen Papuaschädeln nichts von einer Incisura anterior entdecken. Bei japanischen Schädeln, bei welchen die Incisura posterior sehr häufig vorkommt (35,0 %), wurde eine Incisura anterior nur bei 0,8 % konstatiert.

HRDLÍČKA fand bei seinem amerikanischen Schädelmaterial die Incisura anterior nur bei 1,9 %, während die hintere Naht bei 20,9 % vorkam. Bei seinen europäischen, neger- und polynesischen Schädeln fand er keine einzige Incisura anterior.

Nach RUDOLF MARTIN soll eine Incisura anterior immer als der Rest einer ursprünglich vorhanden gewesenen vollständigen Sutura transversa aufgefasst werden müssen, dagegen soll es nicht immer nötig sein, die Incisura posterior hiermit in Zusammenhang zu bringen. Dies soll nur dann der Fall sein, wenn die Naht verhältnismässig lang ist (5—10 mm) und wenn an der Sut. zygomaticomaxillaris an der entsprechenden Stelle noch Spuren einer Incisura anterior zu sehen sind. Bisweilen werden zwei über-

einander liegende Incisurae posteriores wahrgenommen. Bei meinen Papua-schädeln habe ich dies aber nie gesehen.

Ferner wurde von mir noch eine Untersuchung nach den Öffnungen des Canalis zygomaticus angestellt. Dieser Kanal pflegt in der Orbita mit einer Öffnung, dem Foramen zygomatico-orbitale zu beginnen; er setzt sich dann im Jochbein fort und spaltet sich danach in zwei Äste. Der eine Ast mündet in der Angesichtsfläche des Jochbeins, mit dem For. zygomatico-faciale, der andere Ast dagegen in der Temporalfäche des Jochbeins mit dem sog. For. zygomatico-temporale. Indessen scheinen ziemlich oft statt *eines* solchen Canalis zygomaticus zwei selbständige Kanäle vorzukommen, deren jeder mit einer Öffnung in der Orbita beginnt, und von denen der eine in der fazialen, der andere in der temporalen Fläche des Jochbeins mündet. Ausserdem kann bisweilen der Canalis zygomaticus mit einer Anzahl dicht bei einander liegender Foramina in der fazialen Fläche münden.

Was das For. zygomatico-orbitale anbelangt, fand TURO NIEMI bei seinen Lappenschädeln *eine* solche Öffnung bei 46,5 % der Schädel, zwei Öffnungen bei 37,8 %, drei bei 8,6 %, vier bei 0,3 % und keine einzige Öffnung bei 6,8 %. Man sieht hieraus, dass am häufigsten *eine* Öffnung konstatiert wurde; der Prozentsatz dieser Fälle (46,5) ist etwas kleiner als derjenige aller anderen Variationen zusammen. Unter diesen letzteren, die also mehrere Öffnungen besitzen, kommt diejenige mit zwei Foramina am häufigsten vor. Merkwürdig ist ferner der recht grosse Prozentsatz der Schädel, welche kein einziges For. zygomatico-orbitale besitzen.

Für die Papuaschädel fand ich die folgenden Verhältnisse:

Rechts	Links
1 For. zygom. orbitale in 48.4 %	1 For. zygom. orbitale in 36.8 %
2 " " " " 30.3 "	2 " " " " 36.4 "
3 " " " " 11.5 "	3 " " " " 11.7 "
4 " " " " 0.8 "	4 " " " " 4.7 "
5 " " " " 1.6 "	5 " " " " 1.5 "
0 " " " " 7.4 "	0 " " " " 14.8 "

Wir sehen also, dass auch bei den Papuas, ebenso wie bei den Lappen am häufigsten nur *ein* For. zygomatico-orbitale vorkommt (im Mittel: 42,6 %), dass dieser Prozentsatz jedoch etwas kleiner ist als derjenige aller anderen Variationen zusammen. Nächst dem Vorkommen *eines* For. zygomatico-orbitale folgt auch bei den Papuas in Frequenz die Sachlage, dass zwei solcher Öffnungen vorhanden sind. Schliesslich kommt auch der Fall, dass gar kein For. zygomatico-orbitale vorhanden ist, bei den Papuas nicht selten vor; (im Mittel bei 11,1 %).

Was das For. zygomaticofaciale betrifft, fand TURO NIEMI bei seinen Lappenschädeln: *ein* Foramen bei 47,4 %, zwei Foramina bei 31,1 %, drei Öffnungen bei 6,1 %, vier bei 2,4 %, mehr als 4 bei 2,7 % und überhaupt kein Foramen bei 9,3 %. Weitaus die meisten der von ihm untersuchten Schädel hatten also nur *ein* solches Jochbeinforamen. Der Prozentsatz dieser Jochbeine stimmte also fast ganz mit demjenigen überein, der sich für Jochbeine mit nur einem For. zygomatico-orbitale ergab. Der Prozentsatz der Jochbeine, bei denen mehr als *ein* For. zygomatico-faciale und keine einzige solche Öffnung gefunden wurde, ist grösser als derjenige, bei welchen nur *eine* solche Öffnung konstatiert ward.

Für meine Papuaschädel erhielt ich die folgenden Resultate:

Rechts	Links
1 For. zygomaticofaciale 43.5 %	1 For. zygomaticofaciale 42.9 %
2 " " 31.5 "	2 " " 24.6 "
3 " " 4.9 "	3 " " 11.1 "
4 " " 0.0 "	4 " " 11.6 "
Viele " 8.9 "	Viele " 7.2 "
0 For. " 11.3 "	0 For. " 12.7 "

Es zeigt sich also, dass dieser Prozentsatz im allgemeinen nicht sehr viel von demjenigen der Lappenschädel abweicht. Auffallend ist aber vor allem der viel grössere Prozentsatz der Jochbeine mit mehr als 4 Foramina bei den Papuaschädeln. Ferner ist bei den Papuaschädeln, ebenso wie bei den Lappenschädeln der Prozentsatz der Jochbeine mit *einem* For. zygomaticofaciale kleiner als derjenige aller anderen Variationen zusammen.

Wir finden, dass die Prozentsätze für links und rechts bei den Papuaschädeln nicht sehr viel voneinander abweichen; der grösste Unterschied besteht darin, dass zwei Foramina links weniger häufig gefunden wurden als rechts, während Jochbeine mit drei Öffnungen wieder häufiger links als rechts vorkommen. Ferner ist der Prozentsatz der Jochbeine mit vielen For. zygomaticofacialia bei den Papuaschädeln sowohl links als rechts grösser als bei den Lappenschädeln. Ebenso wie bei den Lappenschädeln konstatiert wurde, fand ich auch bei den Papuaschädeln, dass der Prozentsatz der Jochbeine mit *einer* Öffnung viel grösser ist als die Prozentsätze jeder der übrigen einzelnen Variationen.

Für das For. zygomaticotemporale schliesslich fand TURO NIEMI bei den Lappen: *ein* Foramen bei 57,4 % der Jochbeine, zwei Foramina bei 22,0 %, drei bei 4,2 %, viele bei 1,5 % und keine einzige Öffnung bei 14,9 %. Der Prozentsatz der Jochbeine mit *einem* solchen Foramen war also etwas grösser als die Prozentsätze aller anderen Variationen zusammen.

Für die Papuaschädel fand ich für diese Verhältnisse Folgendes :

Rechts			Links		
1	For. zygomaticotemporale	41.4 %	1	For. zygomaticotemporale	49.6 %
2	"	12.9 "	2	"	5.6 "
3	"	1.7 "	3	"	0.8 "
4	"	0.9 "	4	"	0.8 "
Viele	"	0.0 "	Viele	"	0.0 "
0 For.	"	43.1 "	0 For.	"	43.2 "

Ich fand also, im Gegensatz zu TURO NIEMI den Prozentsatz der Jochbeine mit nur *einem* For. zygomaticotemporale etwas kleiner als alle anderen Prozentsätze zusammen. Auffallend ist ferner bei den Papuaschädeln der sowohl rechts als links sich ergebene Prozentsatz von Fällen, in welchen überhaupt kein For. zygomaticotemporale konstatiert wurde! Dieser Prozentsatz war rechts nahezu ebenso gross wie links.

Von LE DOUBLE wurde darauf hingewiesen, dass das Moment multipler For. zygomaticofacialia vielleicht als ein Überbleibsel einer ursprünglichen Naht gedeutet werden könne, und zwar besonders darum, weil diese Löcher oft in einer gebogenen Linie, dicht beim unteren Orbitarande gelegen sind.

Gegen diese Auffassung soll nach NIEMI aber der Umstand sprechen, dass von ihm die grösste Anzahl dieser Öffnungen im Senium gefunden wurde, d.h. in einem Alter, in welchem die Nähte zu verschwinden pflegen. Auch ich habe bei meinem Papua-Material nicht selten eine grosse Anzahl For. zygomaticofacialia bei Schädeln älterer Individuen bemerkt. Es ist auch mir aufgefallen, dass diese Öffnungen nicht selten in einer gebogenen Linie dicht beim unteren Orbitarande angeordnet sind. Jedoch ist dies keineswegs immer der Fall; denn mitunter liegen sie mehr oder weniger unregelmässig über die faziale Fläche des Jochbeins verbreitet. Dieser Umstand spricht gegen die Ansicht LE DOUBLE's, dass diese Foramina den Rest einer Naht darstellen!

Auch habe ich noch verfolgt, inwieweit das Jochbein an der Bildung der Fissura orbitalis inferior teilnimmt. Man kann in dieser Hinsicht drei Fälle unterscheiden, und zwar 1. den Fall, in welchem sich das Jochbein sowohl rechts als links an der Begrenzung dieser Fissur beteiligt; 2. den Fall, in welchem das Jochbein nur an einer Seite hieran beteiligt ist, und 3. den Fall, in welchem keinerlei Beteiligung des Jochbeines an der Begrenzung dieser Spalte stattfindet. Von HISINGER-JÄGERSKJÖLD werden in dieser Hinsicht für die *Lappen* die folgenden Prozentzahlen für das Vorkommen der vorstehend umschriebenen Beteiligung des Jochbeines an der Begrenzung des Orbitarandes angegeben :

Typus I	Typus II	Typus III
78.4 %	12.2 %	9.4 %

Im Vergleich zu den entsprechenden Befunden bei anderen Völkern soll die bei den Lappen bestehende sehr grosse Häufigkeit des beiderseits an der Begrenzung der Fissura orbitalis inferior teilnehmenden Jochbeines besonders auffallend sein. ADACHI fand bei den Japanern den Typus I nur bei 32,1 %, den Typus II bei 14,4 %, aber den Typus III sogar bei 53,4 % der Jochbeine repräsentiert, also völlig andere Verhältnisse, wie sie bei den Lappen konstatiert wurden.

LASSILA, der eine viel grössere Anzahl Lappenschädel hieraufhin untersuchte, fand den Typus I bei 64,14 %, Typus II bei 15,17 % und Typus III bei 20,69 %. Also auch bei diesem grösseren Schädelmaterial überwog Typus I sehr bedeutend, wenn auch der von LASSILA für den Typus I gefundene Prozentsatz kleiner ist, als der von HISINGER-JÄGERSKJÖLD festgestellte.

Bei meinen Papuaschädeln fand ich Typus I bei 63,2 %, Typus II bei 5,1 % und Typus III bei 31,6 % der Schädel. Auch bei meinem Material überwog also der Typus I sehr stark; daneben aber kam ein ziemlich grosser Prozentsatz von Schädeln vor, bei denen das Jochbein gar nicht an der Bildung der Fissura teilnimmt, und nur ein kleiner Prozentsatz, in welchem das Jochbein nur an einer Seite zur Bildung dieser Fissur beiträgt. Wenn man mit TURO NIEMI annehmen dürfte, dass Typus I die primitivere Form ist, dann würde diese niedrigere Entwicklungsform bei den Papuas ebenso wie bei den Lappen häufiger vorkommen als bei den anderen Völkern, bei denen diese Verhältnisse untersucht wurden!

Was die Form des Jochbogens betrifft, kann man ebenfalls drei Typen unterscheiden, nämlich 1. den Typus, bei welchem der Jochbogen wage-recht verläuft (Typus I), 2. denjenigen, bei welchem der Jochbogen eine deutliche Krümmung nach oben aufweist (Typus II) und 3. den Typus, bei welchen der Jochbogen steil von hinten nach unten-vorn absteigt (Typus III).

Nach PETROVITZ (Zur Anatomie des Jochbeins und Jochbogens des Menschen. Anatomischer Anzeiger, Bd. 67, 1929) soll bei der Menschheit der Typus I bei fast der Hälfte der Menschen vorkommen, Typus II etwa ebensohäufig und Typus III nur bei ungefähr 8 %. Dagegen fand TURO NIEMI bei den Lappen Typus I bei 85,85 %, Typus II nur bei 11,32 % und Typus III gar nur bei 2,83 %.

Für die Papuas fand ich die folgende Situation :

Typus I		Typus II		Typus III	
rechts	links	rechts	links	rechts	links
76.3 %	76.3 %	23.7 %	23.7 %	0 %	0 %

also rechts und links ganz derselbe Prozentsatz und völliges, beiderseitiges Fehlen von Typus III.

Schliesslich habe ich noch die Entfernung des Jochbogens von der Seitenfläche des Schädels bestimmt. Es wurde von mir sowohl die sagittale als die transversale Ausdehnung des von dem Jochbogen und der Seitenfläche des Schädels begrenzten Raumes wie auch der aus beiden Grössen berechnete Index bestimmt. Je mehr sich der Jochbogen seitlich hervorwölbt und in demselben Masse, wie der Schädel in seinem frontalen und temporalen Teile minder in der Breite entwickelt ist, desto mehr ist in der Norma verticalis des Schädels vom Jochbogen sichtbar. Wenn in diesem Stande des Schädels der Jochbogen sichtbar ist, spricht man von Phaenozygie, wenn dies nicht der Fall ist, von Kryptozygie. Es ist eine sehr beachtenswerte Tatsache, dass ich bei meinen 128 Papuaschädeln nur einmal Phaenozygie konstatierte, was um so auffallender ist, weil weitaus der grösste Prozentsatz dieser Schädel zum dolichocephalen Typus gehört.

Gewöhnlich wird Phaenozygie als eine primitive Erscheinung gedeutet, dagegen die Kryptozygie als ein Kennzeichen höherer Entwicklung. Der erwachsene Anthropeide, der sich durch ein relativ kleines Gehirnvolumen und eine kräftige Entwicklung des Kiefers kennzeichnet, ist sehr stark phaenozyig. Im jugendlichen Alter dagegen, wenn das Gehirn relativ stärker und das Gebiss noch wenig entwickelt ist, ist die Phaenozygie viel weniger ausgesprochen.

Für die genannte Längen- und Breitenausdehnung und den daraus berechneten Index fand ich bei den Papuaschädeln folgende Werte:

	Transvers. Ausdehn.		Sagittale Ausdehn.		Index	
	rechts	links	rechts	links	rechts	links
Mittelwert	2.6 cm	2.6 cm	3.7 cm	3.87 cm	70.3	67.6
Min.wert	2.0 „	2.0 „	2.9 „	3.1 „	55.81	52.38
Max.wert	3.3 „	3.2 „	4.5 „	4.8 „	89.19	85.71
	w.A. = 0.19 M = 0.017		w.A. = 0.23 M = 0.02		w.A. = 5.3 M = 0.47	

Es zeigt sich also, dass sowohl rechts als links die sagittale Ausdehnung grösser als die transversale ist. In der letzteren fand ich zwischen rechts und links absolut keinen Unterschied; dagegen erwies sich die sagittale Ausdehnung links etwas grösser als rechts und infolgedessen der Index links etwas kleiner als rechts.

Auf Grund der vorstehend beschriebenen Untersuchung der Jochbeine der Papuas glaube ich Folgendes schliessen zu können:

1. Die Papuas haben ein höheres Jochbein als die Lappen.

2. Die mittlere und untere Breite des Jochbeins ist bei den Papuas grösser als bei den Lappen. Die mittlere Breite des Jochbeins der Papuas ist auch deutlich grösser als diejenige der anderen untersuchten Völker (Japaner, Böhmen, Lappen). Auch die untere Breite ist bei den Papuas grösser als bei den genannten Völkern. Die grösste Breite des Jochbeins ist bei den Papuas ebenfalls grösser als bei den Lappen. Das Jochbein der Papuas ist also nicht allein höher, sondern zugleich breiter als das der Lappen.

3. Zwischen rechts und links wurde bei den Papuajochbeinen kein Unterschied in den Breiten- und Höhenausdehnungen konstatiert.

4. Bei den Papuas ist ebenso wie bei anderen Völkern das Jochbein breiter als hoch.

5. Der MATIEGKASche Index ist bei den Papuas erheblich grösser als bei den Lappen.

6. Im Gegensatz zu der Angabe RUDOLF MARTIN's, laut welcher die Incisura anterior oder posterior gewöhnlich bilateral vorkommt, fand ich bei den Papuajochbeinen die hintere Inzisur meistens nur unilateral.

7. Meine Befunde bei den Papuajochbeinen bezüglich des Vorkommens multipler Foramina zygomaticofacialia sprechen nicht für die Auffassung, dass diese multiplen Öffnungen die Reste einer Naht darstellen.

8. Bei den Papuas kommt ein beiderseits an der Begrenzung der Fissura orbitalis inferior teilnehmendes Jochbein sehr häufig vor.

9. Der wagerecht verlaufende Jochbogen wird bei den Papuaschädeln weitaus am häufigsten angetroffen.

ERRATUM

Proc. Akad. Amsterdam 33, p. 817, op den derden regel van anderen
staat: 0.0788; dit moet zijn: 0.086.
